Tests para la varianza cuando la media es desconocida: Las hipótesis a testear son

a) H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$ (ó $\sigma^2 \leq \sigma_o^2$) vs H_1: $\sigma^2 > \sigma_o^2$

b) H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$ (ó $\sigma^2 \geq \sigma_o^2$) vs H_1: $\sigma^2 < \sigma_o^2$

c) H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$ vs H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_o^2$

Estadístico del test: $U = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_o^2}$. Bajo H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$, $U \sim \chi^2_{n-1}$

<u>Región de rechazo</u>: Como siempre la forma de la zona de rechazo depende de la hipótesis alternativa. En este caso, estará dada por

a) $U \geq \chi^2_{n-1,\alpha}$

b) $U \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha}$

c) $U \geq \chi_{n-1,\alpha/2}$ ó $U \leq \chi_{n-1,1\text{-}\alpha/2}$

El tamaño de la zona de rechazo depende del nivel. Por ejemplo, consideremos el caso b). Como la alternativa es $\sigma^2 < \sigma_o^2$, la forma de la región es $U \leq K$, pero como la probabilidad de rechazar H_o siendo cierta (P(Error tipo I)) debe ser α,

$$P_{\sigma_o^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_o^2} \leq K\right) = \alpha \Leftrightarrow K = \chi^2_{n-1,\,\alpha}$$

Ejemplo: Se toman 25 determinaciones de la temperatura en cierto sector de un reactor, obteniéndose

$$\bar{x} = 243^{\circ} C \qquad \text{y} \qquad s = 2.8^{\circ} C$$

Interesa saber, asumiendo normalidad, al nivel 0.05

a) si existe evidencia para decidir que la temperatura media en ese sector del reactor es menor que $250^{\circ} C$.
b) si existe evidencia para decidir que la varianza de la temperatura en ese sector del reactor es mayor que $\left(2^{\circ} C\right)^2$.

a) Las hipótesis a testear son

$$H_o: \mu = 250 \text{ (ó } \mu \geq 250) \quad \text{vs} \quad H_1: \mu < 250$$

El estadístico del test será $T = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - 250}{S}$,

y la región de rechazo estará dada por los valores de *T* tales que

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - 250}{S} \leq -t_{n-1,\,0.05}$$

En nuestro caso, *n* = 25 y por lo tanto $-t_{24,\,0.05} = -1.71$. Además el valor observado de *T* es T_{obs}= –12.5 y por lo tanto se rechaza H_o, es decir hay evidencia de que la temperatura media del reactor es menor que $250^\circ C$.

b) Las hipótesis a testear son

$$H_o\!: \sigma^2 = 4 \ (\text{ó } \sigma^2 \leq 4) \ \text{ vs } \ H_1\!: \sigma^2 > 4$$

El estadístico del test será $U = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, y la región de rechazo estará dada por los valores de *U* tales que

$$U = \frac{(n-1)S^2}{4} \geq \chi^2_{n-1,\,0.05}$$

En nuestro caso, *n* = 25 y por lo tanto $\chi^2_{24,\,0.05} = 36.42$. Como el valor observado de *U* es U_{obs}=47.04, se rechaza H_o. Es decir, hay evidencia de que la varianza de la temperatura del reactor es mayor que $(2^\circ C)^2$.

Tests de hipótesis de nivel aproximado (o asintótico) α para la media de una distribución cualquiera:

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. de una distribución con media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$. Aplicando el Teorema Central del Límite, sabemos que

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

Además, utilizando la propiedad enunciada al construir intervalos de confianza de nivel asintótico (1- α) para la media de una distribución cualquiera,

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1) \\ \dfrac{\sigma}{S} \xrightarrow{p} 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Por lo tanto, si *n* es suficientemente grande,

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \overset{(a)}{\sim} N(0,1)$$

Supongamos que se desea testear a nivel aproximado α alguna de las hipótesis siguientes:

a) H_o: $\mu = \mu_o$ (ó $\mu \leq \mu_o$) vs. H_1: $\mu > \mu_o$
b) H_o: $\mu = \mu_o$ (ó $\mu \geq \mu_o$) vs. H_1: $\mu < \mu_o$
c) H_o: $\mu = \mu_o$ vs. H_1: $\mu \neq \mu_o$

y que n es suficientemente grande. Utilizando como estadístico $Z^* = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu_o}{s}$, las siguientes regiones de rechazo proveen tests del nivel requerido para cada una de las hipótesis:

a) $Z^* \geq z_\alpha$
b) $Z^* \leq -z_\alpha$
c) $|Z^*| \geq z_{\alpha/2}$

Test de hipótesis de nivel aproximado (o asintótico) α para una proporción (parámetro p de la distribución binomial):

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. de una distribución Bi(1,p). Entonces, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ~ Bi(n,p). Aplicando el Teorema Central del Límite, si n es suficientemente grande,

$$\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

siendo $\overline{X}$ la proporción muestral o frecuencia relativa de éxitos.

Un test de nivel aproximado α para las hipótesis:

a) H_o: $p = p_o$ (ó $p \leq p_o$) vs. H_1: $p > p_o$
b) H_o: $p = p_o$ (ó $p \geq p_o$) vs. H_1: $p < p_o$
c) H_o: $p = p_o$ vs. H_1: $p \neq p_o$

se basa en el estadístico $\dfrac{\overline{X}-p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o(1-p_o)}{n}}}$, el cual, si H_o es cierta, tiene distribución aproximada N(0,1). Las regiones de rechazo estarán dadas por

a) $\dfrac{\overline{X}-p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o(1-p_o)}{n}}} \geq z_\alpha$

b) $\dfrac{\overline{X}-p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o(1-p_o)}{n}}} \leq -z_\alpha$

c) $\left|\dfrac{\overline{X}-p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o(1-p_o)}{n}}}\right| \geq z_{\alpha/2}$