Estimación Puntual
e
Intervalos de Confianza

La mayoría de las distribuciones de probabilidad dependen de cierto número de parámetros.

Por ejemplo: $P(\lambda), N(\mu,\sigma^2), Bi(n,p)$

Salvo que estos parámetros se conozcan, deben estimarse a partir de los datos.

El objetivo de la *estimación puntual* es usar una muestra para obtener números que, en algún sentido, sean los que mejor representan a los verdaderos valores de los parámetros de interés.

Supongamos que se selecciona una muestra de tamaño *n* de una población.

Antes de obtener la muestra no sabemos cuál será el valor de cada observación. Así, la primera observación puede ser considerada una v.a. X_1, la segunda una v.a. X_2, etc. Por lo tanto, antes de obtener la muestra denotaremos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a las observaciones y, una vez obtenida la muestra los valores observados los denotaremos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Del mismo modo, antes de obtener una muestra, cualquier función de ella será una v.a., por ejemplo:

$$\overline{X}, \widetilde{X}, S^2, \max(X_1,\ldots,X_n)$$

Una vez obtenida la muestra los valores calculados serán denotados

$$\overline{x}, \widetilde{x}, s^2, \max(x_1,\ldots,x_n)$$

Definición: Un estimador puntual de un parámetro θ es un valor que puede ser considerado representativo de θ y se indicará $\hat{\theta}$. Se obtiene a partir de alguna función de la muestra.

Ejemplo: Con el fin de estudiar si un dado es o no equilibrado, se arroja el dado 100 veces en forma independiente, obteniéndose 21 ases. ¿Qué valor podría utilizarse, en base a esa información, como estimación de la probabilidad de as? Parece razonable utilizar la frecuencia relativa de ases.
En este caso, si llamamos p a la probabilidad que queremos estimar,

$$\hat{p} = \frac{21}{100} = 0.21$$

Propiedades de los estimadores y criterios de selección

Observemos que, dada una muestra $X_i, X_2, \ldots, X_n$, donde $X_i \sim F_\theta$, un estimador puntual del parámetro θ, obtenido en base a ella, es una v.a. $\hat{\theta}$. La diferencia

$$\hat{\theta} - \theta$$

es **el error de estimación** y una estimación será más precisa cuanto menor sea este error. Este error es también una v.a. dado que depende de la muestra obtenida. Una propiedad deseable es que la esperanza del error sea 0, es decir que "en promedio" el error obtenido al estimar a partir de diferentes muestras sea cero.

Definición: Un estimador puntual $\hat{\theta}$ del parámetro θ es **insesgado** si

$$E_\theta(\hat{\theta}) = \theta \qquad \forall\, \theta$$

Si $\hat{\theta}$ no es insesgado, se denomina **sesgo** de $\hat{\theta}$ a

$$b(\hat{\theta}) = E_\theta(\hat{\theta}) - \theta\,.$$

Por lo tanto, un estimador es insesgado si su distribución tiene como valor esperado al parámetro que se desea estimar.

Error standard de un estimador: Al informar el resultado de una estimación puntual es necesario brindar información sobre la precisión de la estimación.

Definición: El **error standard** de un estimador $\hat{\theta}$ es su desviación standard, es decir

$$\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{V_{\theta}(\hat{\theta})}$$

Definición: Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a de una distribución que depende de un parámetro θ y sea $\hat{\theta}_n$ un estimador puntual de θ basado en esa muestra. Diremos que $\hat{\theta}_n$ es un estimador **consistente** de θ si

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$$

es decir, si $\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Definición:

Sea $\hat{\theta}$ un estimador de θ, su **Error Cuadrático Medio** es

$$ECM_{\theta}(\hat{\theta}) = E_{\theta}\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right]$$

Si el estimador $\hat{\theta}$ es insesgado el error cuadrático medio es igual a la varianza del estimador ya que vale la siguiente propiedad:

$$ECM_{\theta}(\hat{\theta}) = V_{\theta}(\hat{\theta}) + \left[b(\hat{\theta})\right]^2$$

INTERVALOS DE CONFIANZA

Cuando se obtiene una estimación puntual de un parámetro, es conveniente acompañar dicha estimación por una **medida** de la precisión de la estimación.

Un modo de hacerlo es informar el estimador y su error standard.

Otro modo es reemplazar la estimación puntual por un intervalo de valores posibles para el parámetro.

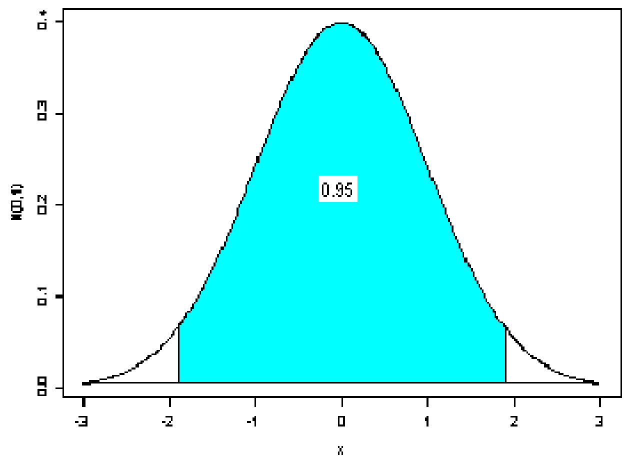
Ejemplo: Supongamos que tenemos una m.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una distribución $N(\mu, \sigma_o^2)$ con varianza σ_o^2 conocida.

Por ser los datos normales, sabemos que

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_o^2}{n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

y, por lo tanto,

$$P\left(-1.96 \leq \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_o} \leq 1.96\right) = 0.95$$



A partir de esta expresión obtenemos

$$P\left(-1.96\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} - \mu \leq 1.96\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 1.96\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Es decir, que la probabilidad de que el intervalo

$$\left[\overline{X} - 1.96\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.96\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}\right]$$

contenga al verdadero valor del parámetro μ es 0.95. Este intervalo se denomina **intervalo de confianza para μ de nivel de confianza 0.95**.

A partir de esta expresión obtenemos

$$P\left(-1.96\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} \le \overline{X} - \mu \le 1.96\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + 1.96\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Es decir, que la probabilidad de que el intervalo

$$\left[\overline{X} - 1.96\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.96\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}\right]$$

contenga al verdadero valor del parámetro μ es 0.95. Este intervalo se denomina **intervalo de confianza para μ de nivel de confianza 0.95**.

En general, tendremos

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_o} \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

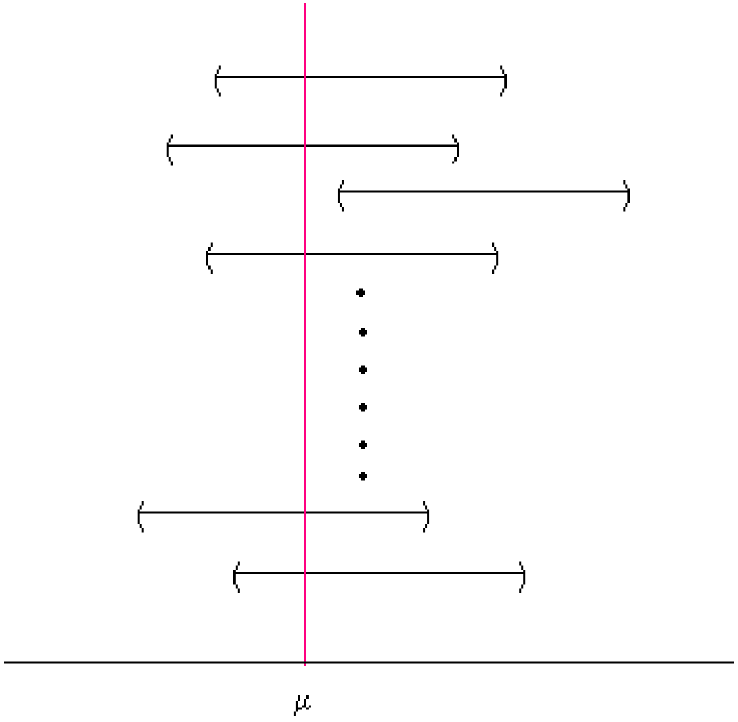
luego el siguiente **intervalo de confianza es de nivel 1 - α para μ**

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}\right]$$

Interpretación:

Supongamos que, en base a diferentes muestras calculamos los correspondientes intervalos de confianza para μ.

Entonces el $(1 - \alpha)$ 100% de ellos contendrán al verdadero valor μ.



,

Ejemplo:

Supongamos que tenemos una muestra normal con n=49 con verdadero valor del desvío standard es σ_o = 35 y que se observa $\bar{x} = 160$ y construimos un intervalo de confianza para la media de nivel 0.95.

Como las v.a. son normales y la varianza es conocida, el intervalo para μ será de la forma

$$\left(\bar{X} - z_{\varepsilon/2} \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\varepsilon/2} \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} \right)$$

Como, $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ y $\sigma_o = 35, n = 49$ obtenemos

$$\left(160 - 1.96 \frac{35}{\sqrt{49}}, 160 + 1.96 \frac{35}{\sqrt{49}} \right) = (160 - 9.8, 160 + 9.8) = (150.2, 169.8)$$

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LOS PARAMETROS DE LA DISTRIBUCION NORMAL

Distribución t:

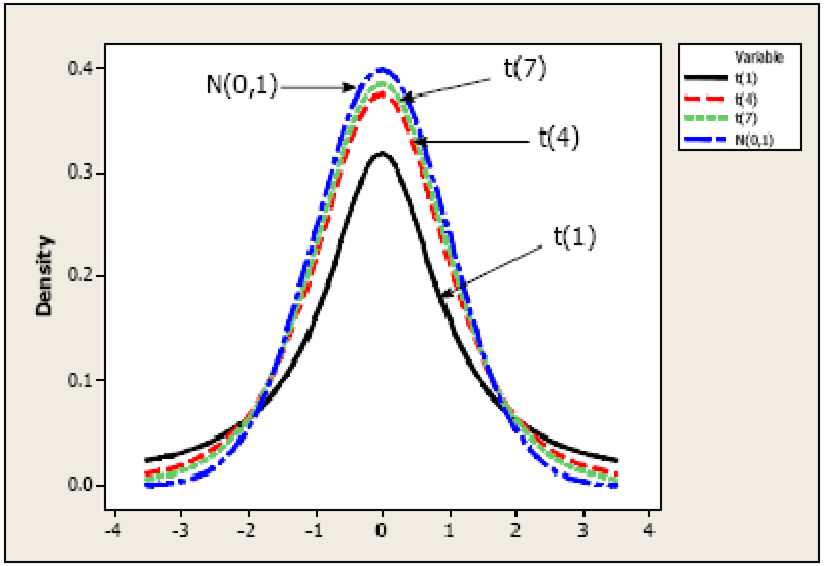
Sean dos v.a. $Z \sim N(0,1)$ y $U \sim \chi^2_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ independientes, entonces

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/n}} \sim t_n$$

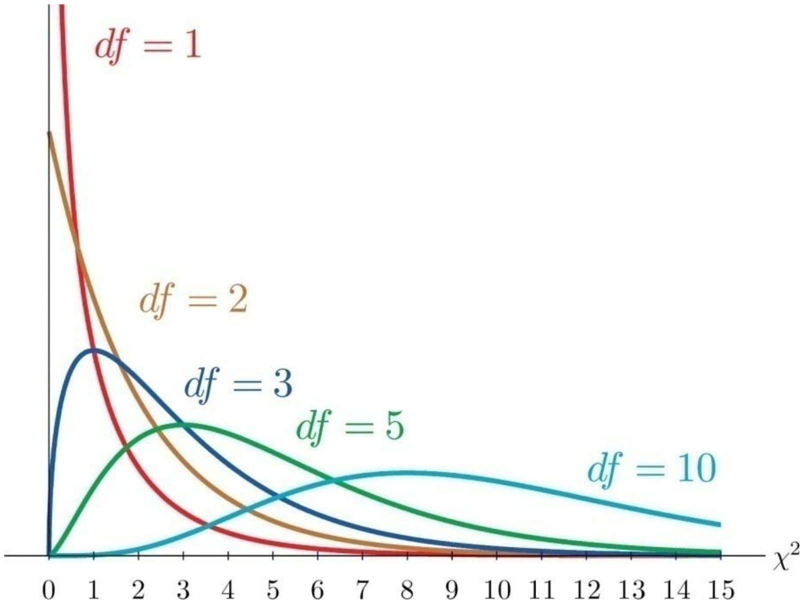
Se dice que *T* tiene distribución ***t* de Student con *n* grados de libertad**.

Esta distribución está tabulada para diferentes valores de *n*. Su densidad es simétrica respecto al 0 y tiene forma de campana, pero tiene colas más pesadas que la distribución normal standard.

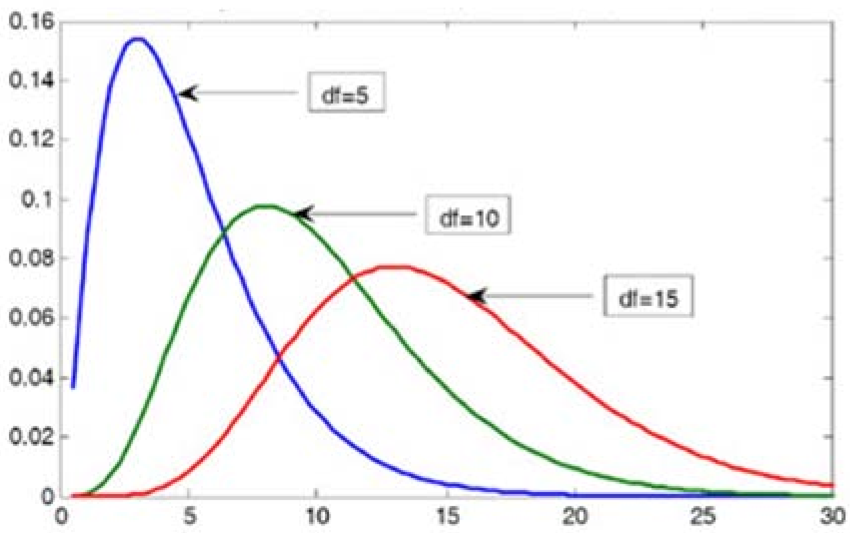
Cuando n tiende a infinito, la distribución de Student tiende a la distribución normal standard.



Variable
t(1)
t(4)
t(7)
N(0,1)
N(0,1)
t(7)
t(4)
t(1)
Density
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4



$df = 1$
$df = 2$
$df = 3$
$df = 5$
$df = 10$
χ^2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15



df=5
df=10
df=15
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0 5 10 15 20 25 30

Proposición: Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución N(μ, σ²), entonces

a) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

b) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ con $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

c) $\bar{X}$ y S^2 son independientes

d) $\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{S} \sim t_{n-1}$

Intervalo de confianza para la media de la distribución normal con varianza desconocida:

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución N(μ, σ^2), entonces

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \sim t_{n-1}$$

$$P\left(-t_{n-1,\alpha/2} \le \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \le t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

de donde se deduce el siguiente **intervalo de confianza de nivel 1 - α para μ,**

$$\left[\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Volviendo al ejemplo:

Supongamos ahora que la varianza es desconocida, pero que el valor observado de S es s=35.

El correspondiente intervalo de confianza para μ será de la forma

$$\left(\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

con $t_{n-1,\alpha/2} = t_{48,0.025} = 2.01$. Obtenemos

$$\left(160 - 2.01\frac{35}{\sqrt{49}}, 160 + 2.01\frac{35}{\sqrt{49}}\right) = (160 - 10.05, 160 + 10.05) = (149.95, 170.05)$$

y como es lógico, resulta un intervalo más largo.

Intervalo de confianza para la varianza de la distribución normal con media desconocida

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución N(μ, σ^2), entonces

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Por lo tanto,

$$P\left(\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Se obtiene el siguiente intervalo

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right]$$

Intervalo de Confianza para σ^2

Suponiendo como antes que observamos $\overline{x} = 160$ y $s = 35$, hallemos un intervalo de confianza para σ^2 de nivel 0.95.
Por tratarse de una muestra normal con media desconocida, el intervalo para σ^2 será de la forma

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \right)$$

con $\chi^2_{n-1,\alpha/2} = \chi^2_{48,0.025} = 69.02$ y $\chi_{n-1,1-\alpha/2} = \chi_{48,0.975} = 30.75$. Obtenemos

$$\left(\frac{48 \cdot 35^2}{69.02}, \frac{48 \cdot 35^2}{30.75} \right) = (851.93, 1912.20)$$

y un intervalo de confianza para σ de nivel 0.95 será

$$\left(\sqrt{\frac{48 \cdot 35^2}{69.02}}, \sqrt{\frac{48 \cdot 35^2}{30.75}} \right) = \left(\sqrt{851.93}, \sqrt{1912.20} \right) = (29.19, 43.73)$$

Esto último resulta de aplicar una función monótona creciente a cada extremo del intervalo para σ^2

Intervalo de confianza para la varianza de la distribución normal con media conocida

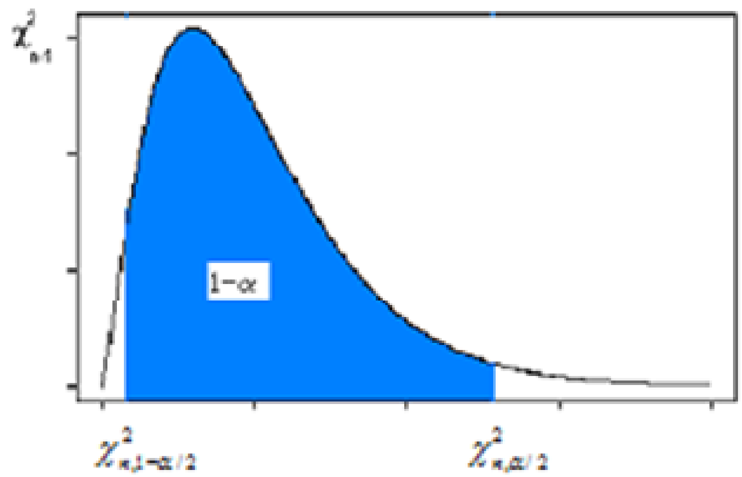
Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución N(μ_o, σ^2), con media μ_o conocida, entonces

$$\frac{X_i - \mu_o}{\sigma} \sim N(0,1) \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{X_i - \mu_o}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Como además las v.a. son independientes

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu_o}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2 = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

¿Cómo elegimos los percentiles de la distribución χ^2 que encierran un área igual a 1 - α?



Los elegimos de manera tal que quede un área igual a α/2 en cada extremo. Entonces,

$$P\left(\chi^2_{n,1-\alpha/2} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_o)^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Se obtiene el siguiente intervalo

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_o)^2}{\chi^2_{n,\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_o)^2}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}\right]$$

Intervalos de confianza de nivel asintótico 1 - α:

En muchos problemas no es posible encontrar intervalos de confianza de nivel exacto 1 - α, o bien son de muy difícil construcción.

En estos dos tipos de situaciones es posible obtener intervalos de confianza de nivel aproximado cuando tenemos un tamaño de muestra grande.

Definición: Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. de una distribución que depende de un parámetro θ. Dadas dos sucesiones $\{a_n(X_1, X_2, ..., X_n)\}$ y $\{b_n(X_1, X_2, ..., X_n)\}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a_n(X_1, X_2, ..., X_n) \le \theta \le b_n(X_1, X_2, ..., X_n)\right) = 1 - \alpha$$

la sucesión de intervalos $[a_n(X_1, X_2, ..., X_n), b_n(X_1, X_2, ..., X_n)]$ es una sucesión de **intervalos de confianza de nivel asintótico 1 - α** para el parámetro θ. También se dice que, si *n* es suficientemente grande, el intervalo $[a_n(X_1, X_2, ..., X_n), b_n(X_1, X_2, ..., X_n)]$ tiene nivel aproximado 1 - α.

¿Porqué calcular intervalos de nivel asintótico?

- Porque no se conoce a distribución exacta de la función pivote
- Porque en general es más fácil encontrar la distribución asintótica que la exacta de la función pivote

Ejemplos: 1) Intervalo para la media de una población.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución F con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Buscamos un intervalo de confianza para μ.

Sabemos que $\overline{X}$ es un estimador insesgado y consistente de μ. No conocemos su distribución exacta porque no conocemos la de X_i, pero sabemos que

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Si σ^2 es conocido, esta función podría deducir un intervalo de nivel aproximado, pero qué usamos si σ^2 es desconocido.

Propiedad:

$$\left.\begin{array}{l} Y_n \xrightarrow{d} Y \\ U_n \xrightarrow{p} a \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad U_n Y_n \xrightarrow{d} aY$$

Como $s \xrightarrow{p} \sigma$ por ser un estimador consistente, entonces $\frac{s}{\sigma} \xrightarrow{p} 1$ y por lo tanto $\frac{\sigma}{s} \xrightarrow{p} 1$.

Luego,

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1) \\ \dfrac{\sigma}{\mathrm{s}} \xrightarrow{p} 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{s} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{s} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

A partir de este resultado,

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{s} \leq z_{\alpha/2}\right) \to 1-\alpha$$

y se obtiene el siguiente intervalo de nivel aproximado 1 - α

$$\left[\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Ejemplo 2). Intervalo de confianza de nivel asintótico 1 - α para el parámetro p de la distribución Binomial:

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución *Bi(1,p)* . Entonces $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n,p)$. Queremos construir un intervalo de nivel asintótico 1 - α para *p*.

Recordemos que, por el TCL,

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \overset{(a)}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\alpha/2} \right) \cong 1-\alpha$$

Hay dos formas de obtener un intervalo para p a partir de esta última expresión. Veremos la de uso más frecuente.

Como $\frac{X}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{p} p$ por la **Ley de los Grandes Números**, podemos aplicar la Propiedad enunciada antes y reemplazar en el denominador que depende de p por su estimador. Entonces

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right) \cong 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{X}{n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}{n}} \leq p \leq \frac{X}{n} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}{n}}\right) \cong 1 - \alpha$$

obteniendo un intervalo para *p* de nivel aproximado $1 - \alpha$.