Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2016

Práctica N° 9: Aproximación por cuadrados mínimos.

Ejercicio 1 Escribir un programa que reciba como datos dos vectores `x` e `y` y un número `n` y devuelva un vector con los coeficientes del polinomio de grado `n` que mejor ajusta la tabla dada por `x` e `y` en el sentido de cuadrados mínimos.

Para el cálculo, utilice la descomposición QR de una matriz apropiada.

Ejercicio 2 La siguiente tabla contiene los porcentajes de asistencia a los laboratorios de Cálculo Numérico y la nota obtenida en el final de la materia, por un grupo de alumnos: Realizar un ajuste lineal y un ajuste cuadrático de los datos.

x	60.3	37.4	65	74.8	39	21.1	36.1	38.6	53.1	65.7	16.8	32.4	78.8	15.3
y	8	6	8	9	6	5	6	6	7	8	5	6	9	5

x	84.8	71.6	54.7	67.1	35	49.7	80.5	66.8	60.4	30.7	50.2
y	10	9	7	8	6	7	10	8	8	6	7

A partir de cada ajuste, ¿qué porcentaje de asistencia a los laboratorios sería recomendable alcanzar si se quiere obtener al menos un 8 en el final?

Ejercicio 3 Considerar la función $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ en el intervalo [-1,1].

Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente f junto con

- los polinomios que aproximan a f en el sentido de cuadrados mínimos en $n+1$ puntos equiespaciados y tienen grado $\frac{2}{5}n$ y $\frac{4}{5}n$,
- el polinomio que resulta de interpolar a f en los puntos anteriores.

Ejercicio 4 Hallar la constante o polinomio de grado 0 que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en n puntos $x_1, \dots, x_n$ en $[a,b]$.

Ejercicio 5 Escribir un programa que reciba como datos dos vectores `x` e `y`, y un conjunto de funciones `S`:

$$\mathtt{S} = \{f_1, \dots, f_n\}$$

y calcule la función $f \in < f_1, \dots, f_n >$ que mejor aproxima a la tabla dada por `x` e `y` en el sentido de cuadrados mínimos.

Nota: Investigar la estructura de datos `cell` como una forma de dar el conjunto `S`.

Ejercicio 6 Sea S el subespacio de funciones continuas definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ generado por las funciones del conjunto $B = \{1, x, 2^x, 3^x\}$. Para $i = 0, 1, 2, 3$, sea $x_i = i$, y sea T un conjunto de datos del tipo $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$.

a) Demostrar que B es una base de S y que para todo conjunto de datos T existe una única función $p \in S$ tal que p interpola a T.

b) Demostrar que $\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{3} p(x_i)q(x_i)$ es un producto interno en S.

c) Aproximar la siguiente tabla de datos en el sentido de cuadrados mínimos

x	0	1	2	3
y	0.3	-0.2	7.3	23.3

con funciones del tipo: (a) $y = a2^x + b3^x$, (b) $y = a2^x + b3^x + c$.

d) Graficar los resultados obtenidos junto con los valores de la tabla de datos.

Ejercicio 7 Considerar $\mathrm{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

a) Graficar la función con el comando erf de Octave en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{erf}(x) = \pm 1$.

b) Aproximar la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con polinomios de grado 1, 3 y 5; considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto con estos polinomios en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que la aproximación es mala fuera del intervalo $[-10, 10]$.

c) Se quiere aproximar nuevamente la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con una combinación lineal de funciones que compartan con erf la propiedad de ser acotada e impar. Para ello, ajustar la función erf con una función del tipo

$$c_1 x e^{-x^2} + c_2 \arctan(x) + c_3 \frac{x}{x^2 + 1},$$

considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto a esta aproximación en el intervalo $[-15, 15]$ y comparar con el ítem (b).

Ejercicio 8 Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim ae^{bx}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(f(x))$.

x	-1	0	1	2
y	8.1	3	1.1	0.5

Ejercicio 9 Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim -e^{ax^2+bx+c}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(-f(x))$.

x	-1	0	1	2
y	- 1.1	- 0.4	- 0.9	- 2.7

Ejercicio 10 Considerar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\ dx$$

a) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en S_m, el espacio generado por $\{x, x^2, x^3, \cdots, x^m\}$.

b) Hallar una base ortonormal para S_3.

c) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos sobre S_3 para $f(x) = x^4$.

Ejercicio 11 Sea

$$\langle f, g\rangle = f(1)g(1) - f(-1)g(-1) + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx.$$

a) Decidir si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en $C^1([-1,1])$.

b) Probar que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno para el espacio $V = \{f \in C^1([-1,1]) : f \text{ es impar}\}$.

c) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos del polinomio $p(x) = x^5$ sobre el subespacio S generado por $\{x, x^3\}$.

Ejercicio 12 a) Demostrar que

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f''(x)g''(x)dx + f(-1)g(-1) + f(1)g(1)$$

es un producto interno en el espacio $\mathcal{C}^2([-1,1])$.

b) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[X]$ para el producto interno definido en el ítem anterior.

c) Probar que si f es una función par en $\mathcal{C}^2([-1,1])$, entonces su proyección sobre $\mathbb{R}_2[X]$ es par, y que si f es una función impar, entonces su proyección es impar.