

# ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Primer Cuatrimestre 2016

## Práctica N° 7: Interpolación.

**Ejercicio 1** Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio  $p(x)$  interpolador de grado menor o igual que 3:

- a) en la forma de Lagrange,
- b) por coeficientes indeterminados,
- c) utilizando diferencias divididas.

Verificar los resultados en **Octave**, utilizando el comando **polyfit**. Graficar el polinomio interpolador, usando **polyval**.

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

**Ejercicio 2** Agregar a las tablas de datos del Ejercicio 1 el punto  $x = 4, y = 1$ . Calcular los polinomios interpoladores, aumentando las tablas de diferencias divididas.

**Ejercicio 3 Método de Horner** Dado un polinomio  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . ¿Cuántos productos y cuantas sumas se realizan al evaluar el polinomio en un cierto  $x_0$ ? Horner propone como alternativa escribir a  $p$  como  $p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + x a_n)))$ . ¿Cuántos productos y cuantas sumas se realizan al evaluar  $p$  bajo esta forma?

**Ejercicio 4** Interpolarse cada una de las siguientes funciones en  $n + 1$  puntos equiespaciados en el intervalo  $[-1, 1]$ . Graficar simultáneamente la función con sus respectivos interpoladores para  $n = 5, 10, 15$ .

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad f_2(x) = |x|, \quad f_3(x) = \text{sen}(\pi x)$$

**Ejercicio 5** Implementar un programa que reciba como input dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , calcule la tabla de diferencias divididas y devuelva el polinomio que interpola los puntos  $(x_i, y_i)$ .

**Ejercicio 6** Encontrar una función del tipo  $2^{ax^3+bx^2+cx+d}$  que interpole la siguiente tabla de datos:

$x$	-1	0	1	2
$y$	1	1	0.5	4

**Ejercicio 7** Hallar y graficar una función del tipo  $e^{a_4x^4+a_3x^3+\dots+a_0}$  que interpole a la función  $f(x) = 1/x$  en 5 nodos equiespaciados en el intervalo  $[1, 10]$ .

**Ejercicio 8** 1. Dado el intervalo  $[a, b]$ , sea  $m$  el punto medio entre  $a$  y  $b$  y sea  $h \leq (b-a)/2$ . Sea  $p = m - h$  y  $q = m + h$ . Demostrar que para todo  $x$  en  $[a, b]$ ,

$$|(x-p)(x-q)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

2. Sean  $x_0 = a, \dots, x_i = x_0 + \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b$ ,  $n+1$  puntos en el intervalo  $[a, b]$ , distribuidos simétricamente respecto del punto medio. Demostrar que para todo  $x$  en  $[a, b]$ ,

$$|(x-x_0)\dots(x-x_n)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

**Ejercicio 9** Sea  $f$  una función  $C^\infty$  tal que para todo  $k \in \mathbb{N}$  y para todo  $x \in [a, b]$  se tiene:

$$|f^k(x)| \leq C^k k!$$

Mostrar que, si  $0 < C < \frac{1}{b-a}$  y  $P_n$  es un polinomio de grado  $n$  que interpola a  $f$  en  $n+1$  puntos distintos, entonces  $P_n$  converge a  $f$  uniformemente, es decir,  $\|f - P_n\|_\infty \rightarrow 0$  cuando  $n$  tiende a  $\infty$ .

**Ejercicio 10** Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{a+x}$ . Sean  $(x_n)_{n \geq 0}$  una sucesión arbitraria de puntos en  $[-1, 1]$  y  $P_n(x)$  el polinomio que interpola a  $f(x)$  en  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Demostrar que si  $a > 3$  entonces  $P_n$  converge a  $f$  uniformemente.

**Ejercicio 11** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(\pi x) + e^x$ . Sea  $P_n$  el polinomio de grado  $n$  que interpola a  $f$  en  $n+1$  puntos equiespaciados.

a) Usando el ejercicio 8, acotar el error  $\|f - P_n\|_\infty$ .

b) Sea  $C_n$  la cota hallada en (a). Para  $n = 1, 3, 5$ , graficar simultáneamente  $f$ ,  $f + C_n$ ,  $f - C_n$  y  $P_n$ .

**Ejercicio 12** Dado un intervalo  $[a, b]$ , decidir como tienen que estar distribuidos  $n+1$  nodos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  en el intervalo de modo que exista  $x \in [a, b]$  tal que

$$|(x-x_0)\dots(x-x_n)| \sim (b-a)^{n+1}$$

**Ejercicio 13** a) Hallar  $n$  de modo que el polinomio  $P_n$  que interpola a la función  $f(x) = e^{2x}$  en los ceros de  $T_{n+1}$  verifique que  $\|f - P_n\|_\infty \leq 10^{-2}$  en  $[-1, 1]$ .

b) Repetir el ítem anterior para  $f(x) = e^x$ ,  $x \in [0, 4]$ .

**Ejercicio 14** Para  $n = 5, 10, 15$ ; graficar simultáneamente el polinomio  $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ , donde  $x_i = -1 + 2i/n$ ;  $i = 0, \dots, n$  y el polinomio de Tchebychev  $T_{n+1}$ .

**Ejercicio 15** Repetir el Ejercicio 4 usando los polinomios que interpolan a la función  $f$  en los ceros del polinomio de Tchebychev de grado  $n+1$ , para  $n = 5, 10, 15$ .

**Ejercicio 16** Utilizar el método de coeficientes indeterminados para hallar un polinomio  $p$  de grado 2 que satisfaga:

$$p(1) = 0, \quad p'(1) = 7, \quad p(2) = 10.$$

**Ejercicio 17** Para ilustrar qué pasa cuando se desea interpolar no sólo una función sino también sus derivadas, consideramos el problema de hallar  $p$  de grado a lo sumo 3 que verifique:

(a)  $p(0) = 1, \quad p'(0) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1;$

(b)  $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1;$

(c)  $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = -6, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1.$

Usando el método de coeficientes indeterminados, demostrar que el problema (a) tiene solución única, el problema (b) no tiene solución, y el problema (c) tiene infinitas soluciones.

**Ejercicio 18** Analizar para qué valores de  $x_0, x_1, x_2$ , y  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  existe un polinomio de grado 2 que satisfice:

$$p(x_0) = \alpha_0, \quad p(x_1) = \alpha_1, \quad p'(x_2) = \alpha_2.$$

y cuándo este polinomio es único.

**Ejercicio 19**

a) Sea  $f(x) = \cos(\pi x)$ , hallar un polinomio de grado menor o igual que 3 que verifique

$$p(-1) = f(-1), \quad p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1).$$

b) Hallar un polinomio de grado menor o igual que 4 que verifique las condiciones del item anterior, más la condición

$$p''(1) = f''(1).$$

**Ejercicio 20** Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x) = e^{2x-1}$  y sean  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  los ceros del polinomio de Tchebychev,  $T_{n+1}$ . Se interpola a  $f$  con un polinomio  $P$  de grado  $\leq n + 1$  de modo que  $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), \dots, P(x_n) = f(x_n)$  y además  $P'(x_n) = f'(x_n)$ . Probar que si  $n \geq 6$  entonces, el error cometido en la interpolación sobre el intervalo  $[-1, 1]$  es menor que  $10^{-3}$ .

**Ejercicio 21** Sea  $f \in C^2[a, b]$ , y sean  $x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_n = b$ , donde  $h = (b - a)/n$ . Considerar la poligonal  $\ell(x)$  que interpola a  $f$  en los puntos  $x_i, i = 0 \dots n$ .

a) Probar que

$$|f(x) - \ell(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

b) Para los  $x \in [a, b]$  tales que  $l$  es derivable, probar que

$$|f'(x) - \ell'(x)| \leq h \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

**Ejercicio 22** Calcular un spline cúbico que interpole los datos:  $x = (0, 0.5, 1), y = (0, 1, 0)$ . Graficar el spline junto con la función  $\text{sen}(\pi x)$ .