Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2016

Práctica N° 4: Número de condición. Sistemas Lineales.

Ejercicio 1 Se quiere estimar la norma 2 de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ como el máximo del valor $\|Ax\|_2/\|x\|_2$ entre varios vectores $x \in \mathbb{R}^3$ no nulos generados al azar. Hacer un programa reciba una matriz A y luego

- genere los primeros 100 términos de la siguiente sucesión:

$$s_1 = 0, \quad s_{k+1} = \max\left\{s_k, \frac{\|Ax_k\|_2}{\|x_k\|_2}\right\}$$

  donde los $x_k \in \mathbb{R}^3$ son vectores no nulos generados al azar con coordenadas en el intervalo $[-1, 1]$.

- grafique la sucesión calculada, junto con el valor exacto de la norma de la matriz.

Recordar que tanto la norma de un vector como de una matriz se calculan en Octave con el comando `norm`. Tener en cuenta que los vectores generados al azar (comando `rand`) tienen coordenadas en el intervalo $[0, 1]$. Chequear, además que estos vectores generados resulten no nulos.

Ejercicio 2 Se tiene el sistema $Ax = b$.

a) Sea x la solución exacta y $\tilde{x}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama *residuo* al vector $r := b - A\tilde{x}$. Si notamos $e = x - \tilde{x}$, mostrar que:

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

b) En lugar del dato exacto b se conoce una aproximación $\tilde{b}$. $\tilde{x}$ es tal que $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Probar que:

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

Ejercicio 3 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $cond_2(A)$ y $cond_\infty(A)$.

b) ¿Cuán chico debe ser el error en los datos $(b - \tilde{b})$, si se desea que el error en la aproximación de la solución sea menor que 10^{-4}?

c) Realizar experimentos numéricos para verificar las estimaciones del ítem anterior. Considerar $b = (3, 2, 2)^t$, que se corresponde con la solución exacta $x = (1, 1, 1)^t$. Generar vectores de error aleatorios, normalizarlos para que su norma sea tan chica como la estimada en el item anterior y perturbar b obteniendo $\tilde{b}$. Finalmente, resolver $A\tilde{x} = \tilde{b}$ y verificar que $\|\tilde{x} - x\| < 10^{-4}$.

Ejercicio 4 Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $\| \ \|$ es una norma matricial, la condición de A verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{cond(A)} \leq \inf\left\{\frac{\|A - B\|}{\|A\|} : B \text{ es singular}\right\}.$$

Deducir que

$$cond(A) \geq \sup\left\{\frac{\|A\|}{\|A - B\|} : B \text{ es singular}\right\}.$$

Nota: En ambos casos, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que $cond(A)$ mide la distancia relativa de A a la matriz singular más próxima.

Ejercicio 5 a) Estimar la $cond_\infty(A)$ de las siguientes matrices en función ε (cuando $\varepsilon \to 0$).

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 2 & 3 & 4 \\ 1-\varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Concluir que la condición de las matrices A y B del ítem anterior tienden a infinito, cualquiera sea la norma considerada.

Ejercicio 6 Sea D_n la matriz diagonal de $n \times n$ con elementos diagonales iguales a $1/10$. Calcular el determinante de D_n y ver que $det(D_n) \to 0$ si $n \to \infty$. ¿D_n está mal condicionada?

Ejercicio 7 Sea $A_n \in \mathbb{R}^n$ la matriz dada por $A_n = (a_{i,j})$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ 1/i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que $Cond_\infty(A_n) \geq Cn^2$ para alguna constante C independiente de n.

b) Probar que $Cond_2(A_n) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Ejercicio 8 La n-ésima matriz de Hilbert $H_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se define de la siguiente manera

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i + j - 1}.$$

a) Demostrar que $cond_\infty(H_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 9 a) Escribir un programa en `Octave` que resuelva un sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ usando eliminación gaussiana sin pivoteo.

b) Adaptar el programa del ítem anterior para que calcule la matriz A^{-1}.

Ejercicio 10 Para cada $n \in \mathbb{N}$, se quiere calcular la solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10^{-3}x + 2y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo, con aritmética de punto flotante de 3 dígitos y sistema de redondeo.

a) Analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real.

b) Repetir el método de eliminación gaussiana eligiendo el pivote más conveniente.

Ejercicio 11 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tridiagonal.

a) Mostrar que el proceso de eliminación gaussiana preserva los ceros de A, es decir que a lo largo de la triangulación no se generan valores no nulos fuera de las tres diagonales principales.

b) Adaptar el programa del Ejercicio 9 para que resuelva un sistema de ecuaciones $Ax = b$, con A tridiagonal. El programa debe recibir cuatro vectores (las tres diagonales principales y b), y devolver x.

Utilizar los comandos `tic` y `toc` de `Octave` para conocer el tiempo que se tarda en resolver un sistema con este programa y comparar con el que se requiere para resolver el mismo sistema utilizando los comandos `inv` y \, que no están especialmente pensados para matrices tridiagonales.

c) Experimentar con ejemplos de la Práctica 3 cuya formulación conduzca a matrices tridiagonales.

Ejercicio 12 Considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

Ejercicio 13 Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcular una descomposición en valores singulares de A.

b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{Ax : \ x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

c) Calcular $\|A\|_2$ y $Cond_2(A)$.

d) Calcular A^{-1} usando la descomposición hallada.

Ejercicio 14 Sean

$$H_j = \begin{pmatrix} j & -j \\ j & j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad An = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & H_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

a) Probar que $Cond_1(A_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

b) Calcular la descomposición en valores singulares y la descomposición QR de A_n.

c) Calcular $Cond_2(A_n)$.

d) Sea P_n la matriz diagonal tal que $(P_n)_{ii} = (A_n)_{ii}$, (P_n es el precondicionador de Jacobi para A_n). Probar que $Cond_2(P_n^{-1}A_n) = 1$. ¿Cómo podría utilizarse esta información si se quiere resolver un sistema de la forma $A_n x = b$?

Ejercicio 15 Escriba un programa en Octave que reciba como input una matriz A y un entero positivo r y:

- Calcule la descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V'$, utilizando el comando `svd`.
- Corrija la matriz Σ poniendo $\sigma_i = 0$, $\forall i > r$.
- Devuelva $B = U\widetilde{\Sigma}V'$, siendo $\widetilde{\Sigma}$ la matriz que resulta de corregir Σ según el ítem anterior.

Este programa calcula la matriz B de rango r tal que la norma $\|A - B\|_2$ es mínima. Aplique este programa a distintas matrices, con distintos valores de r.

Ejercicio 16 El programa del ejercicio anterior puede utilizarse para comprimir imágenes. En efecto, dada una imagen blanco y negro el comando `imread` de Octave convierte la imagen en una matriz en la que cada casillero representa un píxel y su valor corresponde al color del píxel en escala de grises. El comando `imshow` aplicado a esta matriz, muestra la imagen, mientras que el comando `imwrite` permite guardar la matriz como un archivo de imagen.

Implementar un algoritmo que reciba como input un archivo de imagen y un entero positivo r, realice la compresión como en el ejercicio anterior y guarde el resultado en otro archivo. Experimentar con el valor de r, observando cuán chico puede ser r en relación con el tamaño de la matriz si se desea conservar calidad en la imagen.

La misma experiencia puede repetirse con imágenes en color. En este caso, debe tenerse en cuenta que el comando `imread` devuelve un arreglo A de tamaño $m \times n \times 3$: la imagen es de $m \times n$ píxeles y $A(:,:,1)$, $A(:,:,2)$, $A(:,:,3)$ son las matrices correspondientes a su descomposición RGB (red-green-blue).

Ejercicio 17 Sea $v \in \mathbb{C}^n$. Probar que la matriz $I - vv^*$ es unitaria si y sólo si $\|v\|_2^2 = 2$ o $v = 0$.

Ejercicio 18 Dados $x \neq y$ en $\mathbb{C}^n$ tal que $\|x\|_2 = \|y\|_2$ y $\langle x, y \rangle$ es real. Probar que la matriz unitaria $U = I - vv^*$ con $v = \dfrac{\sqrt{2}}{\|x-y\|_2}(x - y)$ satisface que $Ux = y$.

Ejercicio 19 Implementar un programa que calcule la descomposición QR de una matriz aplicando de manera directa el método de ortonormalización de Gramm-Schmidt. Generar algunas matrices aleatorias y comparar las descomposiciones arrojadas por este programa con las dadas por el comando `qr` de Octave.

Ejercicio 20 Hallar la factorización QR de las siguientes matrices

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}. \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 21 Método QR: El *metódo QR* utiliza la descomposición QR para calcular autovalores. Consiste en, dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, generar una suceción de matrices A_k definida del siguiente modo:

$$A_1 = A, \quad Q_k R_k \text{ descomposicion QR de } A_k \text{ y } A_{k+1} = R_k Q_k.$$

a) Probar que todas las matrices A_k tienen los mismos autovalores.

b) Implementar un programa que genere los pimeros m términos de la sucesión del item anterior.

c) Aplicar el programa para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 190 & 66 & -84 & 30 \\ 66 & 303 & 42 & -36 \\ 336 & -168 & 147 & -112 \\ 30 & -36 & 28 & 291 \end{pmatrix},$$

calcular A_m con $m = 30, 50, 100$. Observar que los dos primeros elementos de la diagonal de A_m aproximan a los autovalores reales de A y que los autovalores de la submatriz $A_m(3:4, 3:4)$ aproximan a los autovalores complejos de A.