Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2016

Problemas adicionales de la Práctica N° 2

Ejercicio 1 Galileo: Leer el siguiente párrafo:

> – Pero, Simplicio, tengo la esperanza de que no seguirás el ejemplo de muchos otros que desvían la discusión de un punto principal y dicen que algunas de mis afirmaciones se apartan de la verdad por un cabello, y por este cabello esconden las faltas de otras teorías tan gruesas como un cable de navío. Aristóteles dice que 'una esfera de hierro de 100 libras, cayendo desde una altura de 100 codos, llega a la tierra antes que una bola de 1 libra haya caído un simple codo'. Yo digo que las dos llegan al mismo tiempo. Tú encuentras, al hacer la experiencia, que la más pesada adelanta a la más ligera en 2 ó 3 dedos . . . ; ahora, no puedes esconder detrás de estos dos dedos los 99 codos de Aristóteles, ni puedes mencionar mi error y, al mismo tiempo, pasar en silencio el tuyo, mucho mayor.
>
> Salviati, en *Diálogo sobre dos nuevas ciencias* - Galileo Galilei.

Viviani, estudiante de Galileo, afirma que su maestro realizó efectivamente el experimento descripto en el párrafo anterior, arrojando desde lo alto de la torre de Pisa una bala de cañón y una bala de mosquete. El objetivo de este ejercicio es reproducir numéricamente la experiencia de Galileo.

La velocidad de un objeto en caída libre puede modelarse con la ecuación:

$$\dot{v} = -\frac{\gamma}{m}v^2 + g \tag{1}$$

siendo v la velocidad, m la masa del cuerpo, $g = 9.81$ la aceleración gravitatoria y γ una constante que representa el rozamiento con el fluido en que se produce la caída.

A su vez, la altura x del objeto estará determinada por la ecuación:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -v \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

donde el signo en v se debe a que la velocidad va en sentido negativo respecto de la altura.

La Torre de Pisa mide 55.8 mts. La masa de una bala de cañón es de 16 Kg, y la de una bala de mosquete 0.0082 Kg. Las costantes de rozamiento para cada bala son: $\gamma_c = 0.0058$ y $\gamma_m = 3.74 \times 10^-5$, respectivamente (la diferencia se debe a la diferencia de tamaños).

Implementar un programa llamado `galileo` para obtener la dinámica de la caída de ambas balas, y graficar, en una misma figura, la posición de cada bala en función del tiempo. A partir de los resultados obtenidos, responder:

a) ¿Cuánto tiempo tarda cada bala en tocar el suelo?

b) ¿Cuán lejos del suelo está la bala de mosquete cuando la bala de cañón llega al piso?[1]

Ejercicio 2 Sistema predador-presa: Se tienen dos poblaciones, una de predadores y otra de presas, cuyo número a tiempo t denotamos $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente. La población de x en ausencia de presas tiende a decaer a una tasa α, mientras que la de y en ausencia de predadores tiende a crecer a una tasa β. Por otra parte, los encuentros de predadores y presas hacen crecer la población de los primeros y decrecer la de los segundos, de acuerdo a cierta proporción. De esto modo, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x + \gamma xy \\ \dot{y} &= \beta y - \delta xy, \end{aligned}$$

donde γy representa la tasa de crecimiento de x (mayor cuanto más presas haya) y δx representa la tasa de mortandad de presas (mayor cuanto más predadores haya). Se asume que los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son todos positivos.

a) Dar condiciones sobre los parámetros y los niveles de x e y que garanticen la estabilidad de las poblaciones. Es decir, que $x(t+\Delta t) = x(t)$ e $y(t+\Delta t) = y(t)$ para todo $\Delta t > 0$.

b) Elegir valores de α, β, γ, δ, x_0 e y_0 que satisfagan las condiciones del item anterior y resolver utilizando el método de Euler. Realizar dos gráficos: uno de x e y en función de t (simultáneamente) y otro de y en función de x. ¿Se mantiene constante la solución?

c) Tomar $\alpha = 0.25$, $\beta = 1$, $\gamma = \delta = 0.01$, $x_0 = 80$ e $y_0 = 30$. Resolver utilizando el método de Euler y realizar gráficos como los del ítem anterior.

Ejercicio 3 : Problema de tres cuerpos: Se quiere resolver el problema de tres cuerpos, sujetos a atracción gravitatoria mutua. Para simplificar, supondremos que los cuerpos se mueven en un mismo plano. Si notamos $r_i = (x_i, y_i)$ la posición del cuerpo i-ésimo, y m_i su masa ($i = 1, 2, 3$), las ecuaciones (vectoriales) que rigen el movimiento de los cuerpos son:

$$\ddot{r_1} = -Gm_2\frac{r_1 - r_2}{\|r_1 - r_2\|^3} - Gm_3\frac{r_1 - r_3}{\|r_1 - r_3\|^3}, \tag{2}$$

para el primer cuerpo, y las anágolas para los otros dos. G es la constante de gravitación universal, $G = 0.4982\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{dia}^2\mathrm{Kg}}$.

a) Formular el problema como un sistema de orden uno de la forma:

$$\dot{z} = f(z).$$

Observar que deben obtenerse doce ecuaciones ($z \in \mathbb{R}^{12}$): cada una de las tres ecuaciones vectoriales de la forma (2) debe escribirse como dos ecuaciones escalares (una por coordenada), y a su vez, estas ecuaciones de segundo orden se convierten en dos de orden uno.

[1] No debe cometerse el mismo error que Simplicio al juzgar los resultados. La bala de cañón es alrededor de 2000 veces más pesada que la de mosquete. Consecuentemente, Aristóteles hubiese pronosticado que al llegar la bala de cañón al piso, la de mosquete habría descendido apenas 2 cm.

b) Implementar una función `tres_cuerpos` que reciba como input un vector y y las masas m_1, m_2, m_3, y devuelva los valores de $\dot{z} = f(z)$.

c) Se desea resolver el problema para el sistema Sol (S) - Tierra (T)- Luna (L). Las masas de estos cuerpos (en Kg) son: $m_T = 5.97 \times 10^{24}$, $m_L = 7.3477 \times 10^{22}$ y $m_S = 1.9891 \times 10^{30}$. La distancia Tierra-Sol es $d_{TS} = 1.49597887 \times 10^{11}$m, y la distancia Tierra-Luna: $d_{TL} = 3.844 \times 10^8$m. Supondremos que inicialmente el Sol se encuentra en el origen de coordenadas, la Tierra en el punto $(0, d_{TS})$ y la Luna en el punto (d_{TL}, d_{TS}).

   La velocidad tangencial de la Tierra en torno del Sol, en metros/día, está dada por $v_T = \frac{2\pi d_{TS}}{365}$. Análogamente, la velocidad de la Luna tiene dos componentes: una correspondiente a la rotación en torno al Sol, que se puede aproximar por $v_{LS} = v_T$, y otra correspondiente a su rotación entorno a la Tierra, dada por: $v_{LT} = \frac{2\pi d_{TL}}{28}$. Así, dadas las posiciones iniciales asumidas, las velocidades iniciales pueden tomarse: $v_S = (0, 0)$, $v_T = (v_T, 0)$ y $v_L = (v_{LS}, -v_{LT})$.

   Definir la función `f = @(t,z) tres_cuerpos(y,m_S,m_T,m_L)` y utilizarla para correr alguno de los métodos implementados, con los valores iniciales apropiados, en un intervalo de tiempo que abarque 365 días.

   Graficar simultáneamente, y_i en función de x_i para $i = 1, 2, 3$. Graficar aparte las posiciones de la Tierra y la Luna.