Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2016

Práctica N° 2: Ecuaciones Diferenciales: Problemas de valores iniciales.

Ejercicio 1 Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para resolver ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

tomando como parámetros la función f, los tiempos inicial y final t_0 y t_f, el paso h y el dato inicial y_0; y arrojando como resultados el vector $t = (t_0, t_0 + h, \ldots, t_f)$ y la solución y.

Ejercicio 2 Se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} y'(t) = & 2y(t) - 5\text{sen}(t) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

cuya solución exacta es la función $y(t) = 2\text{sen}(t) + \cos(t)$.

a) Escribir la iteración del método de Euler para esta ecuación.

b) Calcular el error de truncado local.

c) ¿Qué paso h debe elegirse para que el error al estimar $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sea menor que 10^{-2}?

d) Resolver la ecuación con el programa del ejercicio anterior y verificar la cota del error.

Ejercicio 3 Hacer el mapa de curvas integrales en la región $[0, 10] \times [0, 10]$ de la ecuación diferencial

$$y'(t) = (y(t) - 5).(\cos^2(t) - 0.5),$$

graficando simultáneamente, para $k = 0, 1, \ldots, 10$, la solución que se obtiene utilizando el método de Euler con paso $h = 0.01$ y con condición inicial

$$y(0) = k.$$

Ejercicio 4 Considerar el problema $y' = -2ty$, $y(0) = 1$, con $t \geq 0$.

a) Determinar una cota, en términos de h, para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular $y(1)$.

b) ¿Cómo debería tomar h si se desea que el error cometido sea menor que 10^{-2}?

c) Calcular la solución en $t = 1$ usando el valor de h obtenido en el item previo, y verificar las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

Ejercicio 5 Se quiere estimar, aplicando el método de Euler, el valor de e como $y(1)$ donde $y(t)$ es solución de $y' = y, \; y(0) = 1$. Hallar un paso h de modo que el error cometido resulte menor que 10^{-3}. Realizar el mismo trabajo para el método de Taylor de orden 2.

Ejercicio 6 Se quiere verificar numéricamente el orden de convergencia de los métodos de Euler y Taylor de orden 2. Para ello: resolver numéricamente la ecuación del ejercicio anterior, en el intervalo $[0, 1]$ con ambos métodos, tomando $h = 0.1$, $h = 0.0625$, $h = 0.05$, $h = 0.025$ y $h = 0.01$. Para cada h calcular el error que se comete al aproximar $y(1)$: $e_h = |y(1) - y_N|$. Graficar $\log(e_h)$ en función de $\log(h)$. ¿Qué se espera ver? ¿El resultado es consistente con el esperado?

Ejercicio 7 Considerar el problema $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

a) Verificar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0 \quad i = 0, 1, \ldots.$$

b) Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. Comparar la con la solución exacta.

c) Resolver usando el programa del Ejercicio 1 para distintos valores de λ ($\lambda = 1, 10, 50, 100$) y comparar con la solución exacta. ¿Qué sucede?

d) Implementar un programa que resuelva el problema usando el método de Euler implícito y repetir los experimentos del item anterior.

Ejercicio 8 Considerar la ecuación:

$$\begin{cases} y'(t) & = & \dfrac{e^{-y}}{t} \\ y(1) & = & 0. \end{cases}$$

a) Probar que $0 \leq y(t) \leq t$ para $t \geq 1$.

b) Escribir la iteración dada para esta ecuación por el método de Euler. Probar que la solución numérica resultará creciente.

c) Calcular el error de truncado del método de Euler aplicado a la ecuación.

d) Dar un valor de paso h que garantice que el error de la estimación numérica de $y(2)$ sea menor que 10^{-3}.

Ejercicio 9 Probar que una ecuación de orden n:

$$y^{(n)} = f\big(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big),$$

se puede escribir como un sistema de n ecuaciones de primer orden. Mostrar que un problema de valores iniciales para la primera se transforma en un problema de valores iniciales para el sistema.

Ejercicio 10 Modificar el programa del Ejercicio 1 para que acepte ecuaciones vectoriales: la solución y deberá ser una matriz de $m \times n$, donde m es el número de pasos temporales y n la cantidad de variables del problema. De este modo, la fila i de y corresponderá al valor de la solución en todas sus variables a tiempo t_i

Ejercicio 11 La trayectoria de una partícula que se mueve en el plano está dada por las curva $(y_1(t), y_2(t))$, donde las funciones y_1, y_2 son la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & -y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_1(t) - y_2(t) \end{array}.$$

Resolver este sistema en el intervalo $[0, 20]$ con el método de Euler utilizando paso $h = 0.05$ y graficar la trayectoria de la partícula, sabiendo que en tiempo $t = 0$ se encontraba en el punto $(1, -1)$.

Ejercicio 12 Considerar el método de Euler modificado:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(f\big(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(t_i, y_i)\big)\Big).$$

Probar que el error de truncado es $O(h^2)$.

Ejercicio 13 Implementar un programa que resuelva sistemas de la forma:

$$y' = f(t, y),$$

utilizando el método de Runge Kutta de orden 4 dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\Big[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\Big],$$

donde:

$$\begin{array}{c} K_1 = f(t_i, y_i), \\ K_2 = f\big(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1\big), \\ K_3 = f\big(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2\big), \\ K_4 = f\big(t_i + h, y_i + hK_3\big). \end{array}$$

Utilizar este método para resolver nuevamente el Ejercicio 11. Comparar la solución con la obtenida con el método de Euler.

Ejercicio 14 Tiro oblicuo: Un proyectil de masa m se arroja desde un punto del plano (x_0, y_0), con una velocidad inicial dada por el vector (v_0^x, v_0^y). La trayectoria del proyectil se rige por las ecuaciones dadas por la segunda ley de Newton:

$$\begin{array}{rcl} m\ddot{x} & = & -\gamma v^x \\ m\ddot{y} & = & -mg - \gamma v^y, \end{array}$$

donde g es la aceleración gravitatoria $g = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, y γ es una constante de rozamiento con el medio en que se realiza el lanzamiento. Formular el problema en forma de sistema de orden uno.

Tomando $m = 10\mathrm{Kg}$ y $\gamma = 0.2\frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{s}}$, y suponiendo que el proyectil se lanza desde 30 metros de altura con una velocidad inicial horizontal de $40\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, ¿qué distancia recorre antes de tocar el piso?

Hacer un programa que permita responder esta pregunta, utilizando el método de Euler modificado para resolver el sistema.

Ejercicio 15 Péndulo: Se considera el problema del péndulo:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -A\mathrm{sen}(\theta(t)) \text{ en } [0, T] \\ \dot{\theta}(0) = v_0 \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

donde θ representa el ángulo que forma la vara del péndulo con la vertical.

a) Formular el problema como un sistema de ecuaciones de orden uno.

b) Utilizar el método de Euler modificado, con paso $h = 0.05$ para obtener una aproximación de la solución y graficarla.

c) Graficar la solución que se obtiene al utilizar método de Runge Kutta del Ejercicio 13.

Pueden considerarse, a modo de ejemplo, los valores $A = 7$, $T = 10$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_o = 0$.