Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2016

Práctica N° 1: Aritmética de Punto Flotante.

Ejercicio 1 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales con límite l. Demostrar que si existen $p, c \in \mathbb{R},\ p, c > 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - l|}{|a_n - l|^p} = c,$$

entonces el orden de convergencia de la sucesión es exactamente p.

Ejercicio 2 Hallar el límite y calcular el orden de convergencia de las siguientes sucesiones:

$$\text{(i)} \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{(ii)} \quad b_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n^2} \qquad \text{(iii)} \quad c_n = \left(\frac{9}{10}\right)^{2^n}$$

Ejercicio 3 Demostrar que:

a) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \qquad (x \to 0)$

b) $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \qquad (x \to 0)$

Ejercicio 4 **Algunos experimentos:** Realizar las siguientes operaciones en `Octave`. Comparar el resultado esperado con el obtenido. (Notamos ε al épsilon de la máquina. Puede obtenerse con el comando `eps`).

a) Tomando $p = 10^{34}$, $q = 1$, calcular $p + q - p$.

b) Tomando $p = 100$, $q = 10^{-15}$, calcular $(p + q) + q$ y $((p + q) + q) + q$. Comparar con $p + 2q$ y con $p + 3q$ respectivamente.

c) `0.1+0.2 == 0.3`

d) `0.1+0.3 == 0.4`

e) Estimar el valor de $f(x) = \frac{1-cos(x)}{x^2}$ para x cercano a 0. Graficar f en el intervalo $I = [-4e - 8, 4e - 8]$. ¿Qué sucede?

f) $(1 + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}$

g) $1 + (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2})$

h) $\big((1 + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}\big) - 1$

i) $\big(1 + (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2})\big) - 1$

Ejercicio 5 Utilizando el método de redondeo, hallar el número de máquina más próximo a 129 y a 128.75 si se trabaja con base 10 y mantisa de 2 dígitos.

a) Verificar, para $x = 128.75$, la conocida cota para el error relativo

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \leq \varepsilon$$

si $\varepsilon = 1/2\beta^{1-d}$ donde β es la base y d la longitud de la mantisa.

b) ¿Cuánto vale $\left|\dfrac{129 - 128.75 - fl(fl(129) - fl(128.75))}{129 - 128.75}\right|$?

c) Repetir los cálculos utilizando el método de redondeo con base 2 y mantisa de 8 dígitos. Recordar que la escritura en base 2 de estos números es $129 = (10000001)_2$ y $128.75 = (10000000.11)_2$.

Ejercicio 6 a) Sean a y b dos números de máquina. Demostrar que el error relativo que se comete al calcular a^2b con aritmética de punto flotante se puede acotar por $2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, donde ε es el épsilon de máquina asociado a una aritmética de punto flotante.

b) Demostrar que si en cambio $a, b \in \mathbb{R}$ son dos números reales arbitrarios, entonces dicho error se puede acotar por $5\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

Ejercicio 7 Hallar una forma de calcular sin pérdida de dígitos significativos las siguientes cantidades, para $x \sim 0$:

a) $(\alpha + x)^n - \alpha^n$

b) $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - x}$

c) $\cos x - 1$

d) $\operatorname{sen}(\alpha + x) - \operatorname{sen}(\alpha)$

Ejercicio 8 Dada la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con $a = 5 \times 10^{-8}$, $b = 1000$ y $c = 5 \times 10^{-5}$. Estimar con `Octave` el valor de las raíces r_1 y r_2 utilizando la fórmula tradicional.

Recordar que valen las relaciones: $b = -a(r_1 + r_2)$ y $c = ar_1r_2$. ¿Se cumplen en el ejemplo? ¿Por qué?

Proponer una fórmula alternativa para calcular la raíz de menor módulo, y verificar si los resultados mejoran.

Ejercicio 9 Escribir una función $redondeo(n, d)$ que redondee el número decimal n a una expresión de d dígitos.

Utilizando esta función, repetir el experimento del ejercicio anterior usando una aritmética de 3 dígidos, en base 10, tomando $a = 1$, $b = -40$ y $c = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 10 Se pretende calcular las sumas $S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$ con $N \in \mathbb{N}$. Llamemos $\widehat{S_N}$ al valor calculado que se obtiene haciendo $fl(\widehat{S_{N-1}} + a_N)$. Dada $S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$, mostrar que $\widehat{S_N}$ se estaciona a partir de algún N suficientemente grande. Deducir que a partir de entonces $S_N \neq \widehat{S_N}$.

Ejercicio 11 Escribir un programa que reciba como input o bien una función $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ y un número N, o bien un vector f (de longitud N) y calcule, término a término, la suma:

$$\sum_{k=0}^{N} f(k).$$

Ejercicio 12 Recordemos la fórmula para la suma de una serie geométrica:

$$G_N = \sum_{k=0}^{N} r^k = \frac{(1 - r^{N+1})}{1 - r} = Q_N$$

donde $r < 1$.

Tomar un r próximo a 1 (por ejemplo $r = 1 - 10^{-14}$), y un N grande. Calcular el valor de G_N con el programa del ejercicio anterior. Comparar con el valor de Q_N. ¿Cuál de los dos valores obtenidos es más confiable? Analizar.

Ejercicio 13 El desarrollo de Taylor de la función e^x proporciona una forma muy inestable de calcular este valor cuando x es negativo. Utilizar el programa del Ejercicio 11 para evaluar el desarrollo de Taylor hasta grado n de la función e^x en $x = -12$, para $n = 1, \ldots, 100$. Comparar con el valor exacto: $0.000006144212353328210\ldots$ ¿Cuáles son las principales fuentes de error? Proponer un método alternativo para estimar e^{-12}. Verificar si la aproximación obtenida es mejor.

Ejercicio 14 Calcular en `Octave` los valores: $\operatorname{sen}(\pi/2 + 2\pi 10^j)$ con $1 \leq j \leq 25$. ¿Cuánto debería dar? ¿Qué está pasando?