

Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Recuperatorio del Segundo Parcial

Primer cuatrimestre de 2016 (14/07/2016)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Dada la siguiente función: $f(x) = xe^x - \frac{1}{2} \cos(x)$.
 - a) Probar que tiene una única raíz positiva r .
 - b) Demostrar que el método de Newton-Raphson converge a r para todo x_0 en $(r; +\infty)$.
 - c) ¿Qué sucede si $x_0 \in (0, r)$?
2. Sea $f(x) = x^3 + 2x - 1$.
 - a) Probar que f tiene exactamente una raíz r y que $r \in (0, 1)$.
 - b) Sea $F(x) = \frac{1}{2+x^2}$. Probar que r es un punto fijo de F .
 - c) Se propone el método de punto fijo dado por: $x_{n+1} = F(x_n)$. Decidir si existe un intervalo I tal que método converja a r para todo dato inicial $x_0 \in I$.
3. Dada una función f tal que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f(1) = 3$.
 - a) Calcular, construyendo una tabla de diferencias divididas, el polinomio que interpola a f en 0 y 1 y a f' en 0.
 - b) Ampliar la tabla para calcular el polinomio que satisface los requisitos del item anterior y además interpola a f' en 1, si se sabe que $f'(1) = 2$.
4. Sea $I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$.
 - a) Hallar $a > 0$, A_0, A_1 para una regla de cuadratura del siguiente tipo:

$$I(f) \sim A_0 f(-a) + A_1 f(a),$$

con el mayor grado de precisión posible. ¿Cuál es dicho grado?

- b) Utilizar esta regla para calcular aproximadamente $I(\ln(x+2))$. Estimar numéricamente una cota del error cometido.
5. Sea $(V; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el espacio vectorial dado por $V = \mathcal{C}([-1, 1])$ (el conjunto de las funciones $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas) dotado del producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(x^2 + 1)dx.$$

Sea \mathcal{P}_1 el subespacio formado por los polinomios de grado menor o igual que 1.

- a) Hallar una base ortonormal de S .
- b) Hallar el polinomio de grado menor o igual que uno que mejor aproxima a $f(x) = x^3 + 1$, en el sentido de cuadrados mínimos.