Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Recuperatorio del primer parcial

Primer cuatrimestre de 2016 (7/7/2016)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Se considera una máquina muy precaria que trabaja con una aritmética de punto flotante de 4 dígitos y redondeo en base 10. Sea $b = (2, 1)$, se desea resolver por eliminación gaussiana sin pivoteo el sistema lineal $Ax = b$ donde:
$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
   a) Analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real o no.
   b) Repetir la resolución pero utilizando pivoteo y estudiar si mejora significativamente o si esencialmente queda igual.

2. Considerar la siguiente ecuación diferencial:
$$\begin{cases} y'(t) &= t\cos(y(t)^2) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$
   a) Probar que $0 \leq y(t) \leq 2$, $\forall t \in [0, 1]$.
   b) Escribir la iteración del método de Euler correspondiente a este problema.
   c) Estudiar el error de truncado local, y hallar el valor del paso h que garantice que el error cometido al aproximar $y(1)$ sea menor que 10^{-5}. (Observación: también vale que $0 \leq y_i \leq 2\ \forall i$)

3. Se tiene el siguiente problema de valores de contorno:
$$\begin{cases} u''(t,x) - u(t,x) = u_t(t,x) \quad x \in (0,1),\ t \in (0,1) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad \forall t \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$
   a) Describir el esquema discreto explícito que utiliza la discretización usual de la derivada segunda y diferencias forward en la derivada temporal, y escribir el esquema matricial asociado.
   b) Probar que si $2r + \delta t < 1$, para $r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$ el método resulta estable en norma infinito.

4. Estimar la $Cond_\infty(A_\varepsilon)$ de la siguiente matriz en función de epsilon cuando $\varepsilon \to 0^+$:
$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon - 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   y concluir que esta mal condicionada para $\varepsilon > 0$ suficientemente chico.

5. Sea A una matriz inversible de $n \times n$, para la cual se desea aproximar la solución verdadera x_{sol} del sistema lineal $Ax = b$. Para dicho objetivo, se propone considerar alguna matriz inversible N adecuada, un vector inicial x_0 y definir una sucesión de vectores dada por: $x_{j+1} = x_j + y_j$. Donde cada y_j es la solución del sistema $Nx = Ae_j = A(x_{sol} - x_j)$. Este método se conoce como Método de corrección residual.

   a) Suponiendo N dada, hallar una matriz B y un vector c tales que el método se pueda escribir de la forma $x_{j+1} = Bx_j + c$. Mostrar que si x_j converge a un valor x^*, entonces x^* es solución del sistema $Ax = b$.
   b) Sean
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Probar que el método resulta convergente para todo vector inicial x_0. Sugerencia: considerar una norma matricial adecuada.