Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Primer Parcial

Primer cuatrimestre de 2016 (7/5/2016)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, con $0 < \alpha < \varepsilon$, ε el épsilon de la máquina. Se desea calcular la descomposición $\mathtt{QR}$ de la matriz utilizando el algoritmo de Gram–Schmidt. Si consideramos la matriz A por columnas como $A = (A_1|A_2|A_3)$, y la matriz $Q = (q_1|q_2|q_3)$:

   a) Calcular, con aritmética de punto flotante, los vectores $q_1 = \frac{A_1}{\|A_1\|_2}, q_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|_2}, q_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|_2}$, donde $u_2 = A_2 - \langle A_2, q_1\rangle q_1$, $u_3 = A_3 - \langle A_3, q_2\rangle q_2 - \langle A_3, q_1\rangle q_1$.

   b) ¿Son q_2 y q_3 ortogonales? ¿Se cumple que Q^T es la inversa de Q?

2. Considerar el problema: $\begin{cases} y'(t) &= te^{\cos(y(t))} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

   a) Escribir la iteración del método de Euler correspondiente a este problema.

   b) Estimar el error de truncado para $t \in [0, 1]$.

   c) Hallar el valor del paso h que garantice que el error cometido al aproximar $y(1)$ sea menor que 10^{-5}.

3. Se tiene el siguiente problema de valores de contorno:

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = 1 \quad x \in (0, 1) \\ u(0) = 1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

   a) Proponer un esquema discreto para resolver el problema usando diferencias finitas.

   b) Dar una fórmula explícita del error de truncado local del esquema propuesto.

   c) Escribir el esquema como un sistema lineal de la forma $Au = b$, indicando quiénes son la matriz A y el vector b, y sus respectivas dimensiones.

4. Se tiene el sistema $Ax = b$. Debido a errores de medición, la matriz A tiene un error E. Sea $\tilde{A} = A + E$, la matriz con los errores de medición. Se supone que b es exacto. Al resolver el sistema se tendrá una solución $\tilde{x}$ de modo que $\tilde{A}\tilde{x} = b$.

   a) Mostrar que $x = \tilde{x} + A^{-1}E\tilde{x}$.

   b) Mostrar que, si $\tilde{x} \neq 0$, vale la cota $\dfrac{\|x - \tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \text{cond}(A)\dfrac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|}$.

5. Sean a y b números reales positivos, y sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$.

   a) Demostrar que el método de Jacobi converge si y solo si el método de Gauss-Seidel converge.

   b) Dados valores de a y b para los cuales ambos métodos convergen, ¿cuál resulta preferible?