

Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Segundo Parcial
 Primer cuatrimestre de 2016 (30/6/2016)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Considerar la función $f(x) = x^3 - 2x + 2$, que tiene una única raíz $r \in \mathbb{R}$.
 - a) Mostrar que la iteración de Newton-Raphson generada a partir de $x_0 \in (-\infty, -2)$ converge crecientemente hacia r . (Observación: $f(-\sqrt{2/3}) > 0$.)
 - b) ¿Cómo queda la iteración de Newton-Raphson si se comienza con $x_0 = 0$?
2. Sea $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (\frac{1}{6}e^x, \frac{1}{5}(x + y))$. Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$.
 - a) Mostrar que $F(D) \subseteq D$.
 - b) Sea $\mathbf{r} = (r_1, r_2) \in D$ un punto fijo de F , es decir $F(\mathbf{r}) = (\frac{1}{6}e^{r_1}, \frac{1}{5}(r_1 + r_2)) = \mathbf{r}$. Probar que $\|F(x, y) - \mathbf{r}\|_1 \leq \frac{7}{10}\|(x, y) - \mathbf{r}\|_1$.
 - c) Concluir que la iteración $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n)$ que parte de un $(x_0, y_0) \in D$ converge a \mathbf{r} .
3. Sea $f(x) = xe^{-x}$.
 - a) Hallar P_2 , el polinomio de grado menor o igual a 2 que interpola a f en $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.
 - b) Probar que para todo $x \in [0, 2]$, $|x(x-1)(x-2)| \leq 1$, y estimar numéricamente una cota del error $|f(x) - P_2(x)|$ para $x \in [0, 2]$.
4. Sea $I(f) = \int_0^2 f(x)x dx$.
 - a) Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$I(f) \sim A_0f(0) + A_1f(1) + A_2f(2),$$
 que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado?
 - b) Estimar numéricamente una cota del error cometido al utilizar esta regla para aproximar $I(xe^{-x})$.
5. Hallar la mejor aproximación, en el sentido de cuadrados mínimos, de la siguiente tabla de datos

x	0	1	4
y	0	1	$\frac{9}{2}$

con una función del tipo: $g(x) = a\sqrt{x} + b x$.