Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Primer Cuatrimestre - 2016

Práctica 4: Flujos y Conjuntos Invariantes

1. Dibujar el flujo φ_t de los siguientes sistemas lineales $\dot{x} = Ax$ y describir $\varphi_t(B(x_0, \varepsilon))$ para $x_0 = (-3, 0)$.

   a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *b*) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Determinar el flujo $\varphi_t : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ para el sistema no lineal
$$\dot{x} = f(x). \tag{1}$$
con $f(x, y) = (-x, 2y + x^2)$, y mostrar que $S = \{(x, y) \colon y = \frac{-x^2}{4}\}$ es invariante respecto a φ_t.

3. Determinar el flujo $\varphi_t : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ para el sistema no lineal (1) con $f(x, y, z) = (-x, -y+x^2, z+x^2)$, y mostrar que $S = \{(x, y, z) \colon z = \frac{-x^2}{3}\}$ es invariante respecto a φ_t.

4. Sea $f \in C^2(\mathrm{R}^n)$ y $\varphi_t : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ el flujo asociado a (1). Sea $M \subset \mathrm{R}^n$ acotado y medible y $V = \int_M \, dx$. Definimos $M(t) = \varphi_t(M)$ y $V(t) = \int_{M(t)} \, dx$. Probar que
$$\dot{V}(t) = \int_{M(t)} \mathrm{div}(f(x)) \, dx.$$

   Definición. Sea Sea $f \in C^1(\mathrm{R}^n)$ y $\varphi_t : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ el flujo asociado a (1). Un punto $x \in \mathrm{R}^N$ se dice un punto periódico si existe algún $T \neq 0$ tal que
$$\varphi_{t+T}(x) = \varphi_t(x) \quad \forall t.$$

5. Sea $f \in C^1(\mathrm{R}^n)$ y $\varphi_t : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ el flujo asociado a (1). Probar que

   a) x es un punto periódico si y solo si existe $T \neq 0$ tal que $\varphi_T(x) = x$.

   b) Si x es un punto periódico, pero no punto de equilibrio, entonces existe un período mínimo T de x y $\{Tn \colon n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ es exactamente el conjunto de todos los períodos.

6. Sean $f \in C^1$, $\varphi_t : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ el flujo asociado a (1) y $M \subset \mathrm{R}^n$ cerrado y positivamente invariante respecto a φ_t. Probar que
$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\mathrm{dist}(x + tf(x), M)}{t} = 0 \quad \forall x \in M.$$

7. Sean $f \in C^1$, $\varphi_t : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ el flujo asociado a (1) y $M \subset \mathrm{R}^n$. Probar que

a) Si M es invariante respecto a φ_t entonces $\overline{M}$ también lo es.

b) Si M es cerrado, M es positivamente invariante respecto a φ_t si y solo si $\forall x \in M$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\varphi_t(x) \in M$ $\forall t \in [0, \epsilon)$.

c) M es invariante respecto a φ_t si y solo si M^c es invariante respecto a φ_t.

d) Si M es invariante respecto a φ_t entonces $int(M)$ también lo es.

e) Si M es invariante respecto a φ_t entonces ∂M también lo es. Si ∂M es invariante respectoa φ_t entonces $\overline{M}$ y $int(M)$ tambien lo es.