Ec. diferenciales con retardo - Práctica 4

1. Sean $\Phi : \mathbb{R} \times E \to E$ un sistema semidinámico autónomo.
   (a) ¿Es cierto que toda solución $s : [0, +\infty) \to E$ se extiende a $\mathbb{R}$?
   (b) Sea $C \subset E$ un conjunto invariante. Dado $c \in C$, probar que existe una solución $s : \mathbb{R} \to E$ tal que $s(0) = c$. ¿Es única?

2. Sea $\Phi : \mathbb{R} \times E \to E$ un sistema dinámico autónomo. Probar que la función $\Phi(t, \cdot) : E \to E$ es biyectiva para todo t. ¿Qué ocurre si E es un espacio métrico?

3. Dada la ecuación $x'(t) = f(x(t), x(t - \tau))$ con f de clase C^1, probar que si para $a < b$ se cumple
$$f(a, y) \geq 0 \geq f(b, z)$$
   para $a \leq y, z \leq b$, entonces el conjunto
$$C := \{\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}) : a \leq \phi \leq b\}$$
   es positivamente invariante.

4. Dado $a \neq 0$, construir una función de Lyapunov para la ecuación
$$x'(t) = ax(t)^3 + bx^3(t - \tau).$$

5. Consideremos la ecuación
$$x'(t) = bx(t - \tau)(1 - x(t)) - cx(t)$$
   con $b > 0$, $c \geq 0$. Probar:
   (a) El conjunto $C := \{\phi : 0 \leq \phi \leq 1\}$ es positivamente invariante.
   (b) Si $c > b$, entonces 0 es un atractor global.
   (c) Volver a probar el punto anterior de otra manera. $\ddot\smile$

6. Construir una función de Liapunov para analizar la estabilidad del equilibrio positivo de la ecuación
$$x'(t) = x(t)(1 - ax(t) - bx(t - \tau)),$$
   con $a > b > 0$.