Ec. diferenciales con retardo - Práctica 3

1. Sean $b, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ continuas y T-periódicas tales que $b(t) > d(t)$ para todo t. Probar que la ecuación de Nicholson no autónoma

$$u'(t) = -d(t)u(t) + b(t)u(t-\tau)e^{-u(t-\tau)}$$

tiene al menos una solución T-periódica positiva. *Sugerencia*: como en el ejercicio de la práctica anterior, probar que toda solución x con dato inicial $\phi \leq M := \max_t \left(\frac{b(t)}{d(t)e}\right)$ verifica $x(t) \leq M$ para todo t. Luego, elegir $\varepsilon > 0$ tal que $xe^{-x} \geq \varepsilon e^{-\varepsilon}$ para $\varepsilon \leq x \leq M$ y $\varepsilon \leq \ln \frac{b(t)}{d(t)}$ para todo t. Verificar que si $\phi \geq \varepsilon$ entonces $x(t) \geq \varepsilon$ para todo t.

2. Hallar condiciones suficientes para la existencia de soluciones T-periódicas positivas para las siguientes ecuaciones (asumir siempre que los parámetros son funciones T-periódicas positivas):

Modelos Logísticos:

$$\dot{x} = x(t)\left[a(t) - \sum_{i}^{n} b_i(t)x(t-\tau_i(t))\right]$$

$$\dot{x} = x(t)\left(a(t) - b(t)\int_{t-\tau(t)}^{t} c(s)x(s)ds\right)$$

Lasota-Wazewska: $\qquad \dot{x} = -a(t)x(t) + c(t)e^{-b(t)x(t-\tau(t))}$

Mackey-Glass: $\qquad \dot{x} = -a(t)x(t) + \dfrac{b(t)x(t-\tau(t))}{1+x^n(t-\tau(t))}$

Gompertz: $\qquad \dot{x} = -a(t)x(t) + b(t)x(t)\ln\dfrac{c(t)}{x(t-\tau(t))}$

Michaelis-Menten: $\qquad \dot{x} = x(t)\left[a(t) - \dfrac{b(t)x(t-\tau(t))}{1+c(t)x(t-\tau(t))}\right]$

3. Consideremos el problema

$$X'(t) = f(t, X(t), X(t-\tau)) \tag{1}$$

con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, T-periódica en la primera variable y localmente Lipschitz en las últimas dos.

(a) Supongamos que existe $R > 0$ tal que

$$\langle f(t, X, Y), X \rangle < 0 \tag{2}$$

para todo t y para todos los $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|X\| = R$, $\|Y\| \leq R$. Entonces

i. Si $\phi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ es continua tal que $\|\phi\|_\infty \leq R$ entonces la solución X del problema (1) con condición inicial $X_{t_0} = \phi$ está definida en $[t_0 - \tau, +\infty)$.

ii. El problema (1) tiene al menos una solución T-periódica.

(b) Supongamos que ahora vale (2) para $\|X\| = \|Y\| = R$. Probar que existe $\tau_* > 0$ tal que (1) tiene una solución T-periódica para $\tau < \tau^*$.

4. Sean $T > 0$ y $a \neq 0$.

(a) Probar que existe $\tau^* > 0$ tal que el problema $x'(t) = au(t - \tau)$ no tiene soluciones T-periódicas no triviales para $\tau < \tau^*$.

(b) Sea $\tau < \tau^*$ fijo. Probar que existe una constante $c > 0$ tal que para toda función T-periódica x de clase C^1 vale

$$\|x\|_\infty \leq c\|x' - ax(\cdot - \tau)\|_\infty.$$

(c) Sea $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) \neq 0$. Probar que existe $b^* > 0$ tal que para todo $\tau < \tau^*$ y toda b continua T-periódica tal que $\|b\|_\infty < b^*$ el problema

$$x'(t) = f(x(t - \tau)) + b(t)$$

tiene al menos una solución T-periódica. ¿Vale la conclusión cuando $f'(0) = 0$?

(d) Generalizar para cualquier valor x_e tal que $f(x_e) = 0$.

(e) Dado $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, encontrar f y b tal que el problema admita al menos n soluciones T-periódicas no constantes.