Ec. diferenciales con retardo - Práctica 2

1. Sea $f : \mathbb{R} \times R^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y localmente Lipschitz en las dos últimas variables. Escribir el sistema $X'(t) = f(t, X(t), X(t-\tau))$ en la forma $X'(t) = F(t, X_t)$ y probar que F es continua y localmente Lipschitz en X.

2. Sea $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n)$ continua y de clase C^1 respecto de X. ¿Vale siempre que F es localmente Lipschitz en X?

3. Probar el teorema de existencia y unicidad por medio de la iteración de Picard

$$X_0(t) := \phi(0) \text{ para } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta, \qquad (X_0)_{t_0} = \phi,$$

   y

$$X_{n+1}(t) := \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, (X_n)_s)\, ds \text{ para } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta, \quad (X_{n+1})_{t_0} = \phi$$

4. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) - x(t-\tau) \\ y'(t) = y(t) \end{cases}$$

   (a) Probar que si $\tau = 0$ las soluciones con condiciones iniciales no negativa permanecen no negativas.

   (b) ¿Sigue valiendo lo anterior para $\tau > 0$?

5. Sea $C_n^+ \subset \mathbb{R}^n$ el cono positivo cerrado, es decir,

$$C_n^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$$

   y sea $f : \mathbb{R} \times C_n^+ \times C_n^+ \to \mathbb{R}^n$ continua y de clase C^1 en las dos últimas variables. Supongamos que para todo j vale la siguiente condición:

$$x_j = 0 \Rightarrow f_j(t, x, y) = 0.$$

   Probar que si las condiciones iniciales son no negativas, entonces la solución es no negativa.

6. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ continua, decreciente y localmente Lipschitz y sea $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{T\to\infty} \int_0^T a(s)\, ds = +\infty$. Para el problema $x'(t) = -a(t)x(t) + f(x(t-\tau))$, probar:

   (a) Las soluciones con condición inicial $\phi : [t_0 - \tau, 0] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ están globalmente definidas y son estrictamente positivas para $t > 0$.

   (b) Si x e y son soluciones tales que $x(t) \geq y(t) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$ entonces $\lim_{t\to+\infty} x(t) - y(t) = 0$. *Sugerencia*: si $z(t) := x(t) - y(t)$ entonces $z'(t) + a(t)z(t) \leq 0$ para $t \geq t_0 + \tau$. En consecuencia, $v(t) := e^{A(t)}z(t)$, donde A es una primitiva de a, es decreciente.

   (c) Si el problema admite alguna solución T-periódica, entonces a es T-periódica.

   (d) Dos soluciones positivas T-periódicas se cruzan al menos dos veces en cada período.

   (e) Supongamos que $a(t) \geq 0$ para todo t. Si x e y son dos soluciones positivas, entonces existe t_0 tal que $|x(t) - y(t)| \leq \tau g(0)$ para todo $t \geq t_0$. *Sugerencia*: Si t_0 y t_1 son ceros consecutivos de $z := x - y$ tales que $t_1 > t_0 + \tau$ entonces

   $$\max_{t_0 \leq t \leq t_1} |z(t)| = \max_{t_0 \leq t \leq t_0+\tau} |z(t)|.$$

   Por otro lado, si $z > 0$ en $(t_0, t_0+\tau)$ entonces $z' + az < g(0)$. Deducir que

   $$z(t) \leq g(0) \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t a(r)\, dr}\, ds \leq (t - t_0)g(0).$$

7. Para la ecuación de Nicholson, probar:

   (a) Las soluciones con condición inicial positiva están globalmente definidas y son positivas.

   (b) Si x es solución, entonces existe t_0 tal que $x(t) \leq \frac{b}{de}$ para todo $t \geq t_0$. ¿Contradice esto el hecho de que si $b > d$ entonces $x^* = \ln \frac{b}{d}$ es un punto de equilibrio?

   (c) Si $b > de$, deducir del ejercicio previo que si x es una solución tal que $x(t) \geq 1$ para $t \gg 0$ entonces x oscila alrededor del equilibrio $x^* = \ln \frac{b}{d}$ o bien $x(t) \to x^*$ para $t \to +\infty$.

8. Enunciar y probar un teorema de existencia y unicidad para una ecuación de orden n.