Ec. diferenciales con retardo - Práctica $1 - \tau$

Para la ecuación lineal

$$u'(t) = au(t) + bu(t - \tau), \qquad t > 0 \tag{1}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ consideramos la ecuación característica $h(\lambda) = 0$ y definimos

$$z := \tau\lambda, \quad \alpha := \tau a, \quad \beta := \tau b$$

$$F(z, \alpha, \beta) := h(\lambda) = z - \alpha - \beta e^{-z},$$

1. Probar que si λ_n son raíces de h y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}$ converge uniformemente en $[-\tau, +\infty)$ a una solución de (1).
2. Calcular todas las posibles raíces múltiples para α, β fijos y verificar que, en tal caso, la multiplicidad es 2.
3. Para α, β fijos, verificar que:
   (a) Si $\beta \geq 0$ hay una única raíz real, que resulta positiva cuando $\alpha + \beta > 0$ y negativa cuando $\alpha + \beta < 0$.
   (b) No hay raíces reales si y solo si $\beta < -e^{\alpha - 1}$.
   (c) Si $e^{\alpha - 1} \leq \beta \leq -1$ entonces hay al menos una raíz real positiva.
4. Mostrar que si z_0 es una raíz simple para ciertos (α_0, β_0) entonces existen U entorno de (α_0, β_0), V entorno de z_0 y una única función suave $z : U \to V$ tal que $z(\alpha, \beta)$ es raíz característica para todo $(\alpha, \beta) \in U$.
5. Graficar en el plano (α, β) las curvas
   $$C_k := \{(\alpha(y), \beta(y)) : y \in (k\pi, (k+1)\pi)\} \qquad k \in \mathbb{N}_0$$
   donde
   $$\alpha(y) = \frac{y \cos y}{\operatorname{sen} y}, \qquad \beta(y) = \frac{-y}{\operatorname{sen} y}.$$
6. Probar que $\alpha + \beta > 0$ entonces hay al menos una raíz con parte real positiva y lo mismo ocurre para $\alpha + \beta < 0$ cuando (α, β) se encuentra entre C_{2n} y C_{2n+2}. Se puede probar que el número exacto es $2n + 2$. Deducir que sobre C_{2n} con $n > 0$ también existe al menos una raíz con parte real positiva (sugerencia: usar el ejercicio 4).
7. Sean a, b tales que $a + b < 0$, $b < a$. Calcular explícitamente el valor τ^*.
8. Interpretar los resultados obtenidos para el caso particular $a = 0$.