

Ecuaciones diferenciales con retardo - Práctica 0

1 Repaso de ecuaciones ordinarias

1. Existencia:

Sean $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto, $(t_0, x_0) \in \Omega$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua, localmente Lipschitz en x . Entonces el problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

admite una (única) solución $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ para cierto $\delta > 0$. Dar una cota inferior para δ .

2. Lema de Gronwall - Unicidad:

Sean $u, v : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ continuas tales que

$$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t u(s)v(s) ds$$

para todo t y cierto $\alpha \geq 0$. Entonces

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^t v(s) ds}$$

para todo t . Deducir que si $x, y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ son soluciones de (1) con f como en el ejercicio 1 y el intervalo J es un entorno de t_0 , entonces $x = y$.

3. Dependencia continua:

Sean f y x como en el ejercicio 1, y consideremos un punto $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in B_r(t_0, x_0)$ para $r > 0$ suficientemente pequeño. Probar que la solución \tilde{x} del problema

$$\begin{cases} \tilde{x}' = f(t, \tilde{x}) \\ \tilde{x}(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$$

verifica

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq \alpha e^{L|t-t_0|}$$

para ciertas constantes $\alpha = \alpha(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0)$, $L \geq 0$, y t cerca de t_0 , en donde α verifica: $\alpha(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \rightarrow 0$ para $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \rightarrow (t_0, x_0)$.

(a) Deducir que el flujo Φ definido por $\Phi(t, t_0, x_0) := x(t)$ es una función continua.

(b) Probar que si f es de clase C^1 entonces Φ es de clase C^1 .

4. **Extensión de soluciones - Intervalo maximal:**

Sean Ω , $(t_0, x_0) \in \Omega$, f como en el ejercicio 1, y sea $K \subset \Omega$ un compacto.

(a) Probar que si una solución de $x' = f(t, x)$ definida en $[t_0, t_1)$ no se puede extender hasta t_1 , entonces existe $\delta > 0$ tal que $(t, x(t)) \notin K$ para $t \in (t_1 - \delta, t_1)$.

(b) Concluir que si $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \subset \Omega$ entonces $|x(t)| \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow t_1^-$.

(c) Probar que existe un único intervalo abierto I que contiene a t_0 y una única solución $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que no se puede extender fuera de I .

5. Probar que si $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua, localmente Lipschitz en x y tiene crecimiento a lo sumo lineal en x (es decir, $|f(t, x)| \leq a|x| + b$), entonces toda solución del problema $x' = f(t, x)$ puede extenderse a todo el intervalo $[t_0, t_1]$.

6. Sea $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y *globalmente* Lipschitz en x con constante L , y consideremos el operador $T : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ definido por

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Probar que para $x, y \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ se tiene:

$$\|T^n x - T^n y\| \leq \frac{(t_1 - t_0)^n L^n}{n!} \|x - y\|,$$

en donde $T^n = T \circ \dots \circ T$ (n veces). Deducir que si n es grande, T^n es una contracción. ¿Tiene esto alguna relación con el ejercicio 5?

7. **Estabilidad:**

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz y sea x la única solución del problema $x'(t) = f(x(t))$ tal que $x(0) = x_0$. Probar:

(a) Si $x_0 \in (a, b)$, con $a < b$ dos ceros consecutivos de f , entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a \quad \text{o} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = b.$$

2 Repaso general

Revisar los siguientes temas:

1. Teorema de Arzelá-Ascoli.
2. Funciones analíticas.
3. Teorema de residuos.
4. Teorema de Rouché.
5. Transformada de Laplace.