Notas (un tanto desafinadas) sobre el teorema de Lazer-Leach

Consideremos el problema de encontrar soluciones 2π-periodicas de la ecuación

$$u''(t) + m^2 u(t) + g(u(t)) = p(t) \tag{1}$$

con $m \in \mathbb{N}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada con límites en infinito:

$$g(\pm\infty) := \lim_{u \to \pm\infty} g(u)$$

y $p \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ una función 2π-periódica. El teorema de Lazer-Leach da una condición necesaria (que es también suficiente, en el caso de que $g(u)$ se encuentre estrictamente entre $g(-\infty)$ y $g(+\infty)$ para todo u) en términos de los m-ésimos coeficientes de Fourier de p. Más concretamente, si definimos

$$A_m := \int_0^{2\pi} p(t) \cos(mt)\, dt \qquad B_m := \int_0^{2\pi} p(t) \mathrm{sen}(mt)\, dt,$$

se puede probar el siguiente resultado:

Teorema 0.1 *Supongamos que*

$$\sqrt{A_m^2 + B_m^2} < 2|g(+\infty) - g(-\infty)|.$$

Entonces la ecuación (1) tiene al menos una solución 2π-periódica

En otras palabras, el teorema nos dice que si los límites de g en $\pm\infty$ son distintos y la proyección de p al subespacio de $L^2(0, 2\pi)$ generado por las funciones $\mathrm{sen}(mt)$ y $\cos(mt)$ es suficientemente chica, entonces el problema tiene solución. Dicho subespacio es precisamente el núcleo del operador lineal $Lu := u'' + m^2 u$: en tal sentido, el resultado es similar al conocido *teorema de Landesman-Lazer* para el caso $m = 0$, que establece la existencia de soluciones del problema $u'' + g(u) = p$ cuando el promedio de p se encuentra entre los límites $g(\pm\infty)$, es decir:

$$g(-\infty) < \overline{p} < g(+\infty)$$

o

$$g(+\infty) < \overline{p} < g(-\infty).$$ [1]

[1] En este caso el núcleo del operador es el conjunto de constantes, y precisamente $\overline{p}$ es la proyección a dicho núcleo. La idea de que la proyección sea "chica" se puede interpretar en este contexto suponiendo que $g(-\infty) = -g(+\infty)$. Esto siempre se puede hacer, sumando una constante a ambos lados de la ecuación.

Para comenzar, veamos una demostración elemental del teorema para $m = 1$; el caso general es análogo y queda como ejercicio. Supongamos en primer lugar que g es localmente Lipschitz y planteemos el problema de valores iniciales en coordenadas polares

$$u''(t) + u(t) + g(u(t)) = p(t)$$

$$u(0) = r\cos\theta, \quad u'(0) = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Empleando el método de variación de parámetros para la ecuación $u'' + u = \varphi$, se obtiene que

$$u(t) = \left(u(0) - \int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{sen}\,s\,ds\right)\cos t + \left(u'(0) + \int_0^t \varphi(s)\cos s\,ds\right)\mathrm{sen}\,t,$$

de modo que para $u = u_{r,\theta}$ vale

$$u(t) = r\cos(\theta - t) + \int_0^t [p(s) - g(u(s))]\mathrm{sen}(t - s)\,ds.$$

En consecuencia, si (aprovechando las "bondades" de la notación compleja) consideramos la función

$$F(r,\theta) = (u'(2\pi) - u'(0)) + i(u(0) - u(2\pi))$$

resulta:

$$F(r,\theta) = \int_0^{2\pi} [p(s) - g(u(s))]e^{is}\,ds.$$

Usando la anterior fórmula para $u(t)$ y haciendo sustitución, podemos escribir

$$F(r,\theta) = \int_0^{2\pi} [p(s) - g(r\cos(\theta - s) + \xi(s))]e^{is}\,ds$$

$$= \int_0^{2\pi} p(t)e^{it}\,dt - e^{i\theta}\int_0^{2\pi} g(r\cos t + \xi_\theta(t))e^{it}\,dt$$

en donde $|\xi_\theta(t)| = |\xi(t+\theta)| \leq \|p\|_\infty + \|g\|_\infty$ para todo t. Calculemos ahora el límite cuando $r \to +\infty$ de la integral $\int_0^{2\pi} g(r\cos t + \xi_\theta(t))e^{it}\,dt$. Por periodicidad, podemos pensarla como la suma de dos integrales, una en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y otra en $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$: de esta forma, usando convergencia mayorada se ve que

$$\int_0^{2\pi} g(r\cos t + \xi_\theta(t))e^{it}\,dt \to \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(+\infty)e^{it}\,dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} g(-\infty)e^{it}\,dt$$

$$= -2[g(+\infty) - g(-\infty)]$$

uniformemente en θ para $r \to +\infty$. En consecuencia,

$$F(r,\theta) \to A_1 + iB_1 + 2e^{i\theta}[(g(+\infty) - g(-\infty)]$$

uniformemente en θ. En otras palabras, para $r \gg 0$ el índice de la curva $F \circ \gamma_r$, con $\gamma_r(\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ es ± 1 y entonces F se anula en $B_r(0,0)$. El caso general sale por aproximación: basta observar que si u es una solución entonces la cuenta anterior da una cota r para $\|u\|_\infty$ que depende solo de $\|g\|_\infty$ y $\|p\|_\infty$; luego, podemos tomar $R > r$ suficientemente grande y una sucesión de funciones Lipschitz $g_n \to g$ uniformemente en $[-R, R]$ tales que extendidas a todo $\mathbb{R}$ cumplan la hipótesis de Lazer-Leach. El resultado se deduce entonces usando Arzelá-Ascoli (¡ejercicio!).

Lo anterior es muy lindo, pero no parece muy fácil de extender si agregamos un retardo a la ecuación ya que, como vimos, el operador de Poincaré ya no ofrece la gran ventaja de reducir el problema a una ecuación en dimensión finita. Sin embargo, existe otra forma de lograr esto que se aplica también a ecuaciones con retardo. En realidad, algo de esto ya vimos cuando aplicamos el teorema de la función implícita para problemas resonantes del tipo

$$Lu = \varepsilon N_\varepsilon u$$

escribiéndolos en la forma

$$u = Pu + JQN_\varepsilon u + \varepsilon K(N_\varepsilon u - QN_\varepsilon u).$$

Claro que en aquel momento tan grato de nuestras vidas la herramienta a emplear era el teorema de la función implícita, de modo que la cuestión se redujo a calcular la diferencial de la función $\varphi : \ker(L) \to \ker(L)$ dada por $\varphi(u) := -JQN_0(u)$. Eso nos permitió obtener soluciones para ε cercano a 0, bajo la hipótesis de que, para cierto cero u_0 de φ, la diferencial $D\varphi(u_0)$ es inversible. El inconveniente es que ahora no se trata de una perturbación pequeña de un problema lineal, sino que nos gustaría permitir que ε no sea tan chico. Concretamente, vamos a definir $Nu(t) := p(t) - g(u(t))$ y considerar la función

$$\mathcal{F}(u, \varepsilon) := u - (Pu + JQNu + \varepsilon K(Nu - QNu)),$$

con la idea de poder encontrar una solución para $\varepsilon = 0$ que se pueda 'continuar' hasta $\varepsilon = 1$. Sin entrar en detalles, diremos que $\mathcal{F}$ es una *homotopía*; el método consiste en mostrar, al mejor estilo de Rouché, que una cierta cantidad que en algún sentido cuenta los ceros de $\mathcal{F}(\cdot, \varepsilon)$ se mantiene invariante. Dicha cantidad es el famoso *grado de Leray-Schauder* y realmente generaliza las ideas presentes en los teoremas de análisis complejo que se deducen del principio del argumento. Concretamente, supongamos para hacerlo fácil que γ es una curva simple y f es una función holomorfa que no se anula sobre γ, entonces el número

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

coincide con la cantidad de ceros de f en el interior de γ, contados con su multiplicidad. Pero la anterior integral es igual a esta otra

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\gamma} \frac{1}{z}\, dz = I(f \circ \gamma, 0),$$

que está definida para cualquier f continua y se llama... grado. Por supuesto que esto ya no cuenta con exactitud los ceros de f, pero tiene una propiedad fundamental: si es distinto de 0, entonces f necesariamente se anula en el interior de γ. Esto es claro, ya que en caso contrario la función $\frac{1}{z}$ sería holomorfa en un entorno de $\overline{\mathrm{Int}(\gamma)}$; además, se cumple también que si f y g son homotópicas, su grado es el mismo. En otras, palabras, si existe $h(z,\varepsilon)$ continua tal que $h(z,0) = f(z)$ y $h(z,1) = g(z)$ tal que $h(\cdot,\varepsilon)$ no se anula sobre γ, entonces

$$I(f \circ \gamma, 0) = I(g \circ \gamma, 0).$$

Esto se debe a la invariancia por homotopía de la integral compleja y es lo que ocurre, precisamente, en el teorema de Rouché: la hipótesis $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ sobre la imagen de γ no hace más que dejarnos la pelota servida como para lucirnos con un remate antológico (o, mejor dicho, homotópico): $h(z,\varepsilon) := \varepsilon f(z) + (1-\varepsilon)g(z)$.[2]

La generalización de esta idea a $\mathbb{R}^n$ requiere algo de trabajo pero tiene un final feliz: el grado de Brouwer. Y con un poco más de esfuerzo se extiende también a operadores definidos en un espacios de Banach. Pero (como podemos imaginar) no se define para un operador cualquiera, sino de la forma $I-K$, con K compacto. Sin embargo, ¡oh, que gran sorpresa!: justamente los anteriores operadores $\mathcal{F}(\cdot,\varepsilon)$ son de esa forma. Y ahora viene (prepárese, lector) la segunda gran noticia: si K tiene rango finito, vale decir, si su imagen está contenida en un subespacio V de dimensión finita, entonces el grado de $I-K$ sobre un abierto acotado Ω coincide con el de su restricción a $\Omega \cap V$: en otras palabras, con el de la función $\varphi : \Omega \cap V \to V$ dada por $\varphi = (I-K)|_V$.

Por supuesto, el uso de la letra φ es un tanto tendencioso y nos lleva a pensar en la anterior $\varphi = -JQN$, cuyo dominio es ker(L)... que tiene dimensión 2. ¡Cuántas alegrías! Todo se reduce a calcular una integral compleja. Bueno, casi todo: también hay que ver que la homotopía no se anula en el borde del abierto Ω en el que vayamos a trabajar. Y hablando de eso, es hora de pensar en la aplicación concreta a nuestro problema (1). Otra vez, supondremos por comodidad $m = 1$. En primer lugar, recordemos que, para $\varepsilon > 0$, encontrar ceros en $C_{2\pi}$ de $\mathcal{F}(\cdot,\varepsilon)$ equivale a encontrar soluciones 2π-periódicas de la ecuación

$$u''(t) + u(t) = \varepsilon(p(t) - g(u(t)). \tag{2}$$

De esta forma, nuestra primera condición será que (2) no tenga soluciones en $\partial\Omega$. Por otra parte, la homotopía tampoco debe anularse para $\varepsilon = 0$, así que pediremos $\mathcal{F}(u,0) \neq 0$ para $u \in \partial\Omega$. Pero esto, recordemos, equivale a decir que $\mathcal{F}(u,0) \neq 0$ para $u \in \partial\Omega \cap \ker(L)$, ya que $\mathcal{F}(\cdot,0)$ solo se puede anular en el núcleo de L. Y, finalmente, la condición de que el grado de $\mathcal{F}(\cdot,0)$ sea no nulo, se reduce a mirar una función φ definida en el plano. Vamos a hacer esta cuenta con algo de cuidado y, en el camino, aparecerán algunas otras cuentas que ya vimos cuando aplicamos directamente el operador de Poincaré. En efecto,

[2]La metáfora futbolera no es muy apropiada en el caso de quien escribe estas notas, más habituado a las homotopías que a los remates de media distancia.

$\ker(L)$ es el subespacio generado por $\cos(t)$ y $\text{sen}(t)$, cuyos elementos se pueden escribir en la forma $r\cos(t-\theta)$, con $r \geq 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. La función φ se puede pensar entonces en la forma

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [p(t) - g(r\cos(t-\theta))]e^{it}\, dt.$$

En particular, si elegimos nuestro abierto $\Omega \subset C_{2\pi}$ como un 'rectángulo' de la forma

$$\Omega = \{u \in C_{2\pi} : \|Pu\|_\infty < A, \|u - Pu\|_\infty < B\}$$

para ciertos A, B, entonces $\Omega \cap \ker(L)$ es el conjunto de todas las funciones $u(t) = r\cos(t-\theta)$ tales que $r < \frac{A}{\sqrt{\pi}} := R$. En otra palabras, el grado de φ es el índice de la curva

$$\Gamma(\theta) := \int_0^{2\pi} [p(t) - g(R\cos(t-\theta))]e^{it}\, dt$$

en la que, muy criteriosamente, hemos omitido el 2π dividiendo pues no aportaba gran cosa. Y a esta altura, el lector aplicado sabe ya que dicho índice es ± 1 cuando $R \gg 0$. Esto nos dice que si elegimos A suficientemente grande, empezamos con el pie derecho. ¿Qué más falta? Ver que no hay soluciones de (2) para $0 < \varepsilon \leq 1$ en $\partial\Omega$. Veamos, en primer lugar, cómo elegir B. Para esto, vamos a apelar a una desigualdad que se demuestra de varias formas diferentes: existe una constante c tal que

$$\|u - Pu\|_\infty \leq c\|u'' + u\|_{L^2}$$

para toda $u \in C_{2\pi} \cap C^2$. La manera más directa de probar esto consiste en escribir el desarrollo de Fourier de u, es decir:

$$u = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mt) + b_m \text{sen}(mt)$$

Al restarle Pu, van a desaparecer los términos correspondientes a $m = 1$ y eso permite compararlo con el desarrollo de $u'' + u$. Claro, esto da una cota en L^2 y nosotros queremos que sea con la norma infinito: sin embargo, se puede hacer lo mismo con la derivada de $u - Pu$ y luego usar el hecho de que

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} u'(s)\, ds.$$

Para decirlo de una vez: esto último no es otra cosa que volver a verificar que $H^1(0, 2\pi) \hookrightarrow C[0, 2\pi]$, donde H^1 es el espacio de Sobolev... pero, ya que estamos en tema, se puede simplemente recordar que el operador L, restringido al espacio ortogonal a $\ker(L)$, tiene un inverso a derecha (nuestro inolvidable K). Así como está, parece todo enojosamente falso, pero la realidad es que si desde el vamos definimos L en los espacios apropiados (hmmm... esto suena a usar H^2 y L^2 de alguna forma), entonces la desigualdad que queremos probar es consecuencia directa del hecho de que L es un isomorfismo. En fin, dejemos al lector reflexionar sobre estos crípticos comentarios y pasemos al último punto. La desigualdad que supimos conseguir nos muestra que si u es solución de (2), entonces

$$\|u - Pu\|_\infty \leq c\|u'' + u\|_{L^2} = c\varepsilon\|p - g \circ u\|_{L^2} \leq C,$$

ya que g es una función acotada. Así que, ni lerdos ni perezosos, fijamos una constante $B > C$; luego, si $u \in \partial\Omega$ el 'culpable' va a ser la proyección Pu, cuya norma tiene que ser entonces igual al valor A. La prueba concluye mostrando que, si $A \gg 0$, esto no puede pasar. Y la cuenta es muy parecida a lo que vimos al comienzo: basta escribir $u(t) = r\cos(t - \theta) + \xi(t)$, donde no sabemos nada sobre ξ excepto (¡información crucial!) el hecho de que está acotada. La igualdad

$$u''(t) + u(t) = \varepsilon(p(t) - g(u(t)))$$

permite concluir (¿por qué, si se puede saber?) que $p(t) - g(u(t))$ es ortogonal a $\ker(L)$, es decir:

$$\int_0^{2\pi} [p(t) - g(r\cos(t - \theta) + \xi(t))]e^{it}\, dt = 0.$$

A ver lector: haga tender ahora r a infinito como al comienzo y las leyes de la lógica clásica harán el resto del trabajo por usted, completando una gloriosa *reductio ad absurdum*. Lo interesante (aquí es donde hace falta algo de cuidado) es que la convergencia a algo que no es 0 (en eso consiste nuestra absurdidad; ¿qué pensaban?) es uniforme, por eso podemos sacarnos de encima esos molestos θ y ξ... lo cual da la pauta de que no va a ser muy complicado extender el resultado para el caso con retardo. Y queda otro ejercicio para pensar: ¿se podrá hacer lo mismo con otros operadores similares que hemos visto, como $Lu(t) = u'(t) + \alpha u(t - \tau)$?