Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase $9+\varepsilon$, quizás con $\varepsilon \gg 0$, versión preliminar

Como vimos, existe un resultado que permite encontrar puntos fijos de funciones definidas en espacios de dimensión infinita: se trata del teorema de Schauder, que garantiza que si C es un convexo cerrado y acotado de un espacio normado y $T : C \to C$ es continua con $T(C)$ precompacto, entonces T tiene un punto fijo. Esto nos sirvió para extender el teorema de Peano para ecuaciones con retardo pero, además, tiene aplicaciones a diversos problemas, entre otros, el de encontrar soluciones periódicas, es decir, tales que existe $T > 0$ tal que $X(t+T) = X(t)$ para todo t. Una forma de hacerlo, en el caso sin retardo, es mediante el operador P de Poincaré, que se define calculando, para t_0 y un valor inicial X_0, el valor de la correspondiente solución en $t_0 + T$. Un punto fijo de P determina una solución X de la ecuación que además cumple $X(t_0) = X(t_0 + T)$; si la ecuación es T-periódica entonces (por unicidad) se deduce que X es T-periódica.

Para el caso con retardo $X'(t) = F(t, X_t)$ con F continua y localmente Lipschitz, la única diferencia es que ahora la condición inicial es una función, de modo que el operador de Poincaré está definido en algún subconjunto del espacio de dimensión infinita $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. Pero ya sabemos que la solución depende continuamente de la condición inicial ϕ, de modo que para $D := \mathrm{dom}(P)$ el operador $P : D \to C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ dado por $P(\phi) = X_{t_0+T}$, donde $X = X(t, \phi)$ es la única solución con condición inicial $X_{t_0} = \phi$, resulta continuo. Sin embargo, para poder aplicar Schauder necesitamos que P sea compacto... y, para ser francos, el panorama no es del todo alentador, ya que no parece haber forma de garantizar que las soluciones con condición inicial $\phi \in B_R(0) \subset D$ se encuentran acotadas por una constante independiente de R. Para salir del aprieto podemos proponer la ya mencionada condición de sublinealidad:

$$\|F(t, \phi)\| \leq a(t)\|\phi\|_\infty + b(t).$$

Esto es ligeramente bruto, pero que al menos asegura que P manda acotados en acotados y, de paso, que $D = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. Como vimos, en efecto, para $t > t_0$ vale

$$\|X_t\|_\infty \leq \|\phi(0)\| + \int_{t_0}^{t} a(s)\|X_s\|_\infty \, ds + \int_{t_0}^{t} b(s) \, ds;$$

luego

$$\|X_t\|_\infty \leq \left(\|\phi(0)\| + \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds \right) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$$

y en particular, para $\|\phi\|_\infty \leq R$,

$$\|P(\phi)\|_\infty = \|X_{t_0+T}\|_\infty \leq \left(R + \int_{t_0}^{t_0+T} b(s)\, ds \right) e^{\int_{t_0}^{t_0+T} a(s)\, ds}.$$

Claro que esta cota sirve solamente para el primero de nuestros objetivos, aunque es demasiado grosera y, como $\int_{t_0}^{t_0+T} a(s)\, ds > 1$, en ningún caso permite probar que $P(\overline{B_R(0)}) \subset \overline{B_R(0)}$. Más aun, la cota no sirve ni siquiera en el caso, aparentemente sencillo, de que F sea acotada (es decir, $a = 0$), pues el término de la derecha resulta de todas formas mayor que R. Y está bien que así sea, porque estamos ante un problema resonante, vale decir: el problema homogéneo $X'(t) = 0$ tiene soluciones periódicas no triviales (obviamente, las constantes). Esto se traduce en el hecho de que si tenemos una solución periódica del problema

$$X'(t) = F(t, X_t)$$

entonces integrando de los dos lados se obtiene

$$\int_{t_0}^{t_0+T} F(t, X_t)\, dt = X(t_0 + T) - X(t_0) = 0.$$

De esta forma, se encuentra una manera muy fácil de fabricar ejemplos para los cuales no existe solución: por ejemplo, si alguna de las coordenadas de F tiene signo constante. Esto muestra que, a veces, la tarea de encontrar un conjunto invariante puede terminar en un rotundo fracaso.

Pero antes de preocuparnos por estas dificultades, todavía falta terminar de ver si P es compacto. Llegado este punto, puede llamar la atención que ahora, para ver la equicontinuidad, hace falta tener en cuenta un detalle que ignoramos olímpicamente cuando probamos la compacidad del operador que ahora llamaremos $\mathcal{T}$ (para no confundirlo con la T del período... uf!), porque era trivial. Para $t_2 > t_1 \geq t_0$ escribimos la solución como

$$X(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, X_s)\, ds$$

y luego

$$\|X(t_2) - X(t_1)\| \leq \| \int_{t_1}^{t_2} \|F(s, X_s)\|\, ds \leq C(t_2 - t_1).$$

Los otros casos (en los que $t_1 < t_0$) se deducen, dijimos, de la continuidad uniforme de ϕ: para $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta < \frac{C}{2}$ tal que $\|\phi(s) - \phi(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $|s - t| < \delta$ y con eso basta para asegurar que $\|X(t_2) - X(t_1)\| < \varepsilon$ para t_1, t_2 cualesquiera que se encuentren a distancia menor que δ. El problema es que ahora ϕ no está fija, de modo que el δ de la continuidad uniforme no se puede elegir -valga la redundancia- uniformemente en $\overline{B_R(0)}$.[1] Un verdadero problemón aunque, en el momento en que estamos por resignarnos y admitir que 'de esta no zafamos', llega en nuestro auxilio la observación milagrosa: el operador de Poincaré tiene en cuenta solamente el estado X_{t_0+T}, que solamente se fija en lo que ocurre a partir del valor $t_0 + T - \tau$. Entonces las papas (y el honor) quedan a salvo si pedimos una condición más o menos obvia: $T \geq \tau$.[2]

Ahora sí, estamos en condiciones de ocuparnos del otro asunto, en general bastante delicado, de encontrar un convexo cerrado invariante. Como vimos, el caso F acotada, que parecía sencillo, se puede poner feo, así que, motivados por glorias pasadas, vamos a intentar primero con uno que salió bien para una ecuación sin retardo, algo del tipo

$$x'(t) + x(t) = F(t, x_t).$$

Ahora el problema no es resonante pues, para cualquier período T, la única solución periódica de $x'(t) + x(t) = 0$ es la trivial. En tal caso, el hecho de que F sea acotada y T-periódica en t transforma el problema en algo prácticamente trivial: en efecto, para podemos tomar $t_0 = 0$ y escribir como en la clase previa, para $t > 0$,

$$x(t) = \phi(0)e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} F(s, X_s)\, ds.$$

Luego, para $\|\phi\|_\infty \leq R$ vale

$$\|x(t)\|_\infty \leq Re^{-t} + C$$

para todo t. En particular,

$$\|x_T\|_\infty \leq Re^{\tau - T} + C$$

lo que muestra, para $T > \tau$, que la bola de radio R es invariante si elegimos $R \geq \frac{C}{1-e^{\tau-T}}$.

Por supuesto, la existencia de un convexo cerrado acotado invariante C puede probarse en muchos otros casos y -dicho sea de paso- de ser así, sea quién sea F, no hace falta repetir la demostración de que P es compacto: ¡es obvio que $P(C)$ es acotado!

Intuitivamente, se ve que una situación de ese estilo se da, por ejemplo, cuando es posible demostrar que para cierto R vale:

- $x(t) = R \Rightarrow x'(t) < 0$.
- $x(t) = -R \Rightarrow x'(t) > 0$.

[1] Si esto pudiera hacerse, la bola tendría que ser compacta.

[2] En el caso sin retardo, poner $T = \tau$ es hacer trampa, pues el problema se reduce a estudiar una ecuación ordinaria.

En efecto, en tal caso las soluciones que comienzan con una condición inicial en la bola de radio R no pueden escapar de allí. Esa es otra manera de entender nuestro éxito en el ejemplo previo

$$x'(t) = -x(t) + F(t, x_t)$$

con $|F(t,\phi)| \leq B$. Si tomamos $R > B$ se verifica, para $x(t) = R$, que $x'(t) = -R + F(t, x_t) < 0$. Del mismo modo, para $x(t) = -R$ vale que $x'(t) > 0$ y el resultado queda probado.

Como diría Borges, la prueba es "tan irreprochable como baladí", aunque da lugar a una observación inmediata: no importa lo que pase con F para valores más grandes de x. Más precisamente, alcanza con una condición del estilo:

$$|F(t,\phi)| < R$$

para todo t y toda ϕ tal que $\|\phi\|_\infty \leq R$. Esto se puede generalizar de manera inmediata para un sistema, pues cuando $\|X(t)\| = R$ el campo definido por $-X(t) + F(t, X_t)$ apunta hacia adentro de la bola: si multiplicamos la ecuación por $X(t)$, resulta

$$X'(t) \cdot X(t) = F(t, X_t) \cdot X(t) < 0.$$

Pero el término de la izquierda es la derivada en t de la función $\varphi(s) := \frac{\|X(s)\|^2}{2}$; esto muestra que cerca de la esfera de radio R el valor de la norma de X decrece. Sin duda, esto puede generalizarse. En el caso sin retardo

$$X'(t) = f(t, X(t))$$

alcanza con que f sea continua y localmente Lipschitz en X tal que

$$f(t,X) \cdot X < 0 \qquad \text{para} \qquad \|X\| = R.$$

Es fácil encontrar una condición análoga para el caso de un retardo discreto (ver práctica 3).

Para concluir, veamos otra manera de encarar estos problemas, que si bien emplea las mismas herramientas se apoya en una filosofía algo diferente. La idea ahora es buscar un punto fijo directamente en el espacio de funciones T-periódicas

$$C_T := C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) = \{X \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : X(t+T) = X(t) \,\text{para todo}\, t\}$$

con la habitual norma del supremo. Como primer intento, se podría pretender buscar, para cada $Y \in C_T$, una solución T-periódica del problema

$$X'(t) = F(t, Y_t)$$

y definir un operador de punto fijo a partir de allí. Sin embargo, nos topamos una vez más con el problema de la resonancia: por un lado, no es cierto que para todo Y hay una solución T-periódica; por otro lado, en caso de existir, tal solución no es única. Existen muchas maneras de sortear esta dificultad, aunque algunas escapan al objetivo de estas notas. Por el momento, nos limitaremos a tratar un caso elemental, en el que el operador lineal asociado no es resonante. Por ejemplo, la ecuación

$$x'(t) = a(t)x(t) + F(t, x_t)$$

donde F es T-periódica en t. Veamos que si $\int_0^T a(t)\,dt \neq 0$ entonces el problema

$$x'(t) - a(t)x(t) = \varphi(t)$$

tiene, para toda $\varphi \in C_T$, una única solución $x = x_\varphi \in C_T$. En efecto, uno puede apelar a 'resultados conocidos' o bien hacer la cuenta directamente: la solución general, por variación de parámetros, tiene la forma

$$x(t) = Ce^{\int_0^t a(s)\,ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(r)\,dr}\varphi(s)\,ds. \tag{1}$$

Para que sea T-periódica, la condición (necesaria y suficiente) es que $x(T) = x(0) = C$, vale decir,

$$C = Ce^{\int_0^T a(s)\,ds} + \int_0^T e^{-\int_s^T a(r)\,dr}\varphi(s)\,ds$$

lo que determina, gracias a nuestra hipótesis, un único valor

$$C = \frac{1}{1 - e^{\int_0^T a(s)\,ds}} \int_0^T e^{-\int_s^T a(r)\,dr}\varphi(s)\,ds.$$

Es inmediato verificar además que la aplicación $\varphi \mapsto x$ es continua. De esta forma se tiene un operador $\mathcal{T} : C_T \to C_T$ definido de la siguiente manera. Por empezar, dada $y \in C_T$ definimos la función real $\varphi_y(t) := F(t, y_t)$, que claramente es T-periódica y (ejercicio) continua. Luego, definimos $\mathcal{T}(y) = x_{\varphi_y}$, es decir, como la única solución T-periódica del problema

$$x'(t) = a(t)x(t) + F(t, y_t).$$

Finalmente, para que las cosas funcionen como corresponde, vamos a imponer la condición habitual de que F sea compacto, lo que en este caso solo significa que manda conjuntos acotados en conjuntos acotados. Bajo esta hipótesis es fácil ver que $\mathcal{T}$ es un operador compacto y, con un poco de buena fortuna, podremos encontrar algún conjunto en el cual aplicar Schauder. A modo de ejemplo, consideremos el problema

$$x'(t) = a(t)x(t) + f(x(t - \tau))$$

con $a \in C_T$ tal que $\int_0^T a(t)\,dt < 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ continua tal que $f(0) \neq 0$. Todo parece indicar que la cosa va a ser fácil si f es acotada[3] , así que

[3]Cabe observar, de todas formas, que a diferencia del método de Poincaré no estamos pidiendo que f sea localmente Lipschitz. Sin embargo, es un ejercicio sencillo verificar que el método de Poincaré se puede extender también a este caso, resolviendo problemas aproximados y usando Arzelá-Ascoli.

intentaremos relajar un poco la condición y pedir solamente que sea sublineal en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

En realidad, pediremos un poco menos: que para $x > 0$ valga

$$f(x) \leq \varepsilon x + b$$

para cierto ε suficientemente chico. Nuestro objetivo es encontrar soluciones positivas del problema, así que en realidad vamos a definir $\mathcal{T}(y) = x$ como la única solución T-periódica del problema

$$x'(t) = a(t)x(t) + f(|y(t - \tau)|).$$

Si observamos con cuidado la fórmula (1), junto con el cálculo posterior de C, podemos deducir la existencia de una constante c independiente de φ tal que $\|x\|_\infty \leq c\|\varphi\|_\infty$. De esta manera, para $x = \mathcal{T}y$ se obtiene

$$\|x\|_\infty \leq c\|f(|y(\cdot - \tau)|)\|_\infty \leq c(\varepsilon\|y\|_\infty + b)$$

De esta forma, si $\varepsilon c < 1$ deducimos que $\mathcal{T}$ tiene al menos un punto fijo x en la bola $\overline{B_R(0)} \subset C_T$ con $R = \frac{cb}{1-c\varepsilon}$. Veamos, finalmente, que x es positiva. Para ello, supongamos que $x(t_0) < 0$ para algún t_0 y definamos $A(t) := \int_{t_0}^t a(s)\, ds$. Como

$$\left(e^{-A}x\right)'(t) = e^{-A(t)}f(|x(t - \tau|) \geq 0,$$

entonces vale

$$e^{-A(t_0+T)}x(t_0 + T) \geq x(t_0)$$

y luego, por periodicidad,

$$e^{-A(t_0+T)} \leq 1,$$

lo que es absurdo ya que $A(t_0 + T) = \int_0^T a(t)\, dt < 0$.