Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 8, versión preliminar (las críticas son bienvenidas)

En la clase previa vimos cómo extender los teoremas clásicos de la teoría de ecuaciones ordinarias al caso de ecuaciones con retardo: existencia y unicidad, continuación de soluciones, continuidad respecto del dato inicial. Para esto, asumimos que $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz respecto de X. En particular, vimos que si además F es sublineal entonces las soluciones están globalmente definidas. A modo de observación, cabe destacar que en el caso de uno o más retardos discretos el método de pasos da un resultado más preciso, pues la restricción en el crecmiento debe imponerse solamente a X. Más precisamente, si tenemos la ecuación

$$X'(t) = f(t, X(t), X(t - \tau_1), \ldots, X(t - \tau_N))$$

para que haya existencia y unicidad basta pedir, como vimos, que f sea continua y localmente Lipschitz en X (es decir, en su segunda variable). Además, si f es sublineal en X entonces la solución está globalmente definida. Por ejemplo, eso ocurre en sistemas de la forma

$$X'(t) = A(t)X(t) + G(t, X(t - \tau_1), \ldots, X(t - \tau_N))$$

donde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ y $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son continuas.

Pero si hablamos de resultados 'clásicos' para ecuaciones ordinarias, también lo es el teorema de Peano, que dice que el problema $X'(t) = f(t, X(t))$ con f continua admite *al menos* una solución con condición inicial $X(t_0) = X_0$ definida en algún entorno de t_0: en otras palabras, lo que se pierde al no pedir la condición de Lipschitz es la unicidad.

Una demostración directa del teorema de Peano se sigue del teorema de aproximación de Weierstrass y -por supuesto- del hecho de que ya sabemos que vale el teorema de existencia y unicidad para funciones localmente Lipschitz: en efecto, alcanza con fijar un entorno compacto K de (t_0, X_0) y una sucesión de funciones suaves f_n (por ejemplo, polinomios) que converge uniformemente a f sobre K. Extendiendo las funciones f_n de manera que estén acotadas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, podemos suponer que la única solución X_n del problema aproximado $X'(t) = f_n(t, X(t))$ con condición inicial $X(t_0) = X_0$ está definida en un entorno $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ fijo y su gráfico, para dicho entorno, está contenido en K. Como además X_n' está acotada, se deduce del teorema de Arzelá-Ascoli que X_n tiene una subsucesión que converge uniformemente a una solución del problema.

Sin embargo, existe una demostración más directa, que además tiene mejores chances de adaptarse para el problema con retardo. Vimos, en efecto, que la cuestión se reduce a encontrar un punto fijo de un cierto operador T, para el cual obtuvimos una bola cerrada invariante B y aplicamos el teorema de punto fijo de Banach. La novedad es que bajo ciertas condiciones (las famosas 'condiciones apropiadas') se puede asegurar que T tiene un punto fijo, sin necesidad de que sea una contracción. Antes de continuar, conviene repasar un poco la construcción de la última clase, para el problema

$$X'(t) = F(t, X_t), \qquad X_{t_0} = \phi.$$

Asumiendo que $\|\phi\|_\infty \leq R$, la idea consistió en tomar simplemente $B := \overline{B_{2R}(0)}$, dentro de $E := \{X \in C([t_0-\tau, t_0+\delta], \mathbb{R}^n) : X_{t_0} = \phi\}$, que es un espacio métrico completo, pues resulta un subconjunto cerrado de un espacio de Banach. El operador T se define por $(TX)_{t_0} = \phi$ y

$$TX(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, X_s)\, ds$$

para $t > t_0$ y, según vimos, eligiendo δ chico se puede garantizar que $T(B) \subset B$. Sin embargo, en esta cuenta usamos el hecho de que F es localmente Lipschitz, para asegurar que $\|F(s, X_s)\|$ se mantiene acotado. En general, la continuidad de F no es suficiente para garantizar que existe una cota válida para toda $X \in B$, de modo que pediremos una condición más fuerte (aunque no tanto como ser Lipschitz). Concretamente, se trata de una condición de compacidad, pues pediremos que F mande conjuntos acotados a conjuntos acotados... cuya clausura es, obviamente, compacta.

Definición 0.1 *Sean X, Y espacios métricos. Una función continua $g : X \to Y$ se dice compacta si para todo $A \subset X$ acotado la clausura de $g(A)$ es un conjunto compacto.*

Observación 0.1 *Si g es lineal, la continuidad se deduce de la condición de compacidad. Sin embargo, esto no vale en general.*

La buena noticia es que si imponemos esta condición a F, entonces el operador T antes definido también resulta compacto. Esto se debe (como siempre) al teorema de Arzelá-Ascoli. En efecto, la continuidad es bastante inmediata pues si por ejemplo $X_n \to X$ uniformemente, entonces para $t > t_0$ vale

$$\|TX_n(t) - TX(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|F(s, (X_n)_s) - F(s, X_s)\|\, ds.$$

Por la continuidad de F, para cada s fijo el integrando tiende a 0; además, la sucesión $\{X_n\}$ está acotada de modo que, como F manda acotados en acotados, existe una constante C tal que $\|F(s, (X_n)_s) - F(s, X_s)\| \leq C$ para todo n y todo

$s \in [t_0, t_0 + \delta]$. El resultado se deduce entonces por el teorema de convergencia mayorada. Por otra parte, si $\|X\|_\infty \leq M$ y $t_2 > t_1 > t_0$ resulta

$$\|TX(t_2) - TX(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|F(s, X_s)\| \, ds \leq C(t_2 - t_1)$$

para cierta constante C que depende solo de M, lo que permite deducir la equicontinuidad.

La misma condición garantiza que, eligiendo δ adecuadamente, se verifica que $B = \overline{B_{2R}(0)}$ es un conjunto invariante: en efecto, si $\|F(t, \psi)\| \leq C$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ y $\|\psi\|_\infty \leq 2R$, entonces claramente $\|TX(t)\| \leq \delta C$ para todo t, de modo que alcanza con pedir $\delta = \min\{\tau, \frac{2R}{C}\}$. A continuación veremos un resultado que asegura que, bajo estas condiciones, T tiene al menos un punto fijo.

Por supuesto, si el espacio fuera de dimensión finita no habría que preocuparse por hacer nada más, pues el teorema de Brouwer garantiza que cualquier función continua de una bola cerrada en sí misma tiene un punto fijo. Esto es trivial en el caso unidimensional (teorema de Bolzano) y todavía bastante sencillo para dimensión 2. Por ejemplo, es muy famosa la demostración que emplea teoría de juegos (concretamente, el llamado *teorema del Hex*). Para quien sabe algo de análisis complejo -por ejemplo, el lector que logró llegar hasta aquí- también hay una manera elemental de verlo: si $f : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ es continua y no tiene puntos fijos, entonces basta tomar $g(z) := z - f(z)$ y $\gamma(t) := e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$. Definiendo

$$h(t,s) := \begin{cases} s\gamma(t) + (1-s)g(\gamma(t)) & 0 \leq s \leq 1 \\ g((1+s)\gamma(t)) & -1 \leq s \leq 0 \end{cases}$$

se ve que h es continua y no se anula.[1] En consecuencia, el índice de la curva $h(\cdot, s)$ respecto del 0 es el mismo para todo s, lo que es absurdo, pues $h(t, 1) = \gamma(t)$, que tiene índice 1, y $h(\cdot, -1)$ es constante. Para dimensión mayor, la prueba no es tan inmediata y suele recurrir a la homología, o bien a resultados de la combinatoria como el Lema de Sperner. De todas formas, existe una demostración que , mirada con cierto cariño, reproduce la idea geométrica de la que acabamos de ver para $n = 2$ (ver por ejemplo [1]).

Es sabido que el teorema de Brouwer no se extiende de manera automática a dimensión infinita. El ejemplo más conocido es el de Kakutani, quien mostró que en cualquier espacio de Hilbert separable se puede encontrar una función continua $T : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ sin puntos fijos. La idea es simple, basta observar que si $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una base, entonces el operador lineal de *shift* S que manda cada e_j a e_{j+1} es una isometría y deja fijo únicamente al origen. Entonces podemos considerar por ejemplo

$$T(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2} e_1 + S(x),$$

[1] Esto último es trivial si $s \leq 0$ y, para $s \geq 0$ se debe al hecho de que $|f(z)| \leq 1$ para todo z: en efecto, si $h(t, s) = 0$ entonces $\gamma(t) = (1 - s)f(\gamma(t))$ y entonces $s = 0$, $f(\gamma(t)) = \gamma(t)$, lo que es absurdo.

que está definida y es continua en la bola cerrada unitaria. Además,

$$\|T(x)\|^2 = 1 - \|x\|^2 + \|S(x)\|^2 = 1,$$

de modo que en realidad $T(\overline{B_1(0)}) \subset \partial B_1(0)$. Si x es un punto fijo de T, su norma debe ser 1 y luego $x = T(x) = S(x)$, lo que es absurdo. Otro ejemplo más concreto es el siguiente: sobre la bola unitaria cerrada de $L^2(0,1)$ definimos la función T dada por

$$Tf(x) := \begin{cases} -f\left(\frac{2x}{1+\|f\|}\right) & x < \frac{1+\|f\|}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1+\|f\|}{2}. \end{cases}$$

Es fácil ver que T es continua; además,

$$\|Tf\|^2 = \int_0^{\frac{1+\|f\|}{2}} f\left(\frac{2x}{1+\|f\|}\right)^2 dx + 1 - \left(\frac{1+\|f\|}{2}\right).$$

Por sustitución, se deduce que

$$\|Tf\|^2 = \left(\frac{1+\|f\|}{2}\right)(\|f\|^2 - 1) + 1 \leq 1.$$

Si f es un punto fijo de T, de la igualdad $\|Tf\|^2 = \|f\|^2$ se ve que $\|f\| = 1$ y entonces $f(x) = -f(x)$ para todo $x < 1$, lo que es absurdo.

No es difícil comprobar que el 'culpable' de que existan estos ejemplos es, por supuesto, el hecho de que en dimensión infinita la bola unitaria no es compacta. Tal es, en esencia, la conclusión que se desprende del teorema de Schauder, que constituye la extensión más razonable del teorema de Brouwer a espacios generales de Banach. Para ello, conviene primero probar un lema que asegura que los operadores compactos se pueden aproximar, sobre conjuntos acotados, por operadores de de rango finito. Más precisamente,

Lema 0.2 *Sea C un subconjunto de un espacio normado E y sea $T : C \to E$ continua tal que $\overline{T(C)}$ es compacto. Dado $\varepsilon > 0$ existe $T_\varepsilon : C \to E$ de rango finito tal que $\|T_\varepsilon(x) - T(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in C$. Más aun, existen $x_1, \ldots, x_N \in \overline{T(C)}$ tales que $T_\varepsilon(C)$ está contenido en la cápsula convexa de $\{x_1, \ldots, x_N\}$.*

Demostración: Cubriendo $\overline{T(C)}$ por bolas $B_\varepsilon(x)$ con $x \in \overline{T(C)}$ podemos elegir x_j tales que la unión de las bolas $B_j := B_\varepsilon(x_j)$ con $j = 1, \ldots, N$ cubren $T(C)$. Definamos $V_\varepsilon := gen\{x_1, \ldots, x_N\}$ y veamos que la función $T_\varepsilon : C \to V_\varepsilon$ dada por $T_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^N a_j x_j$, con

$$a_j := \frac{dist(T(x), B_j^c)}{\sum_{k=1}^N dist(T(x), B_k^c)}$$

cumple lo pedido. En primer lugar, para todo $x \in C$ existe algún j tal que $T(x) \in B_j$ y, en consecuencia, $dist(T(x), B_j^c) > 0$. Esto dice que T_ε está bien definida, y claramente es continua. Además, $\sum_{j=1}^{N} a_j = 1$, de modo que $T_\varepsilon(x)$ pertenece a la cápsula convexa de $\{x_1, \ldots, x_N\}$ y, además, podemos escribir

$$T_\varepsilon(x) - T(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x_j - T(x)).$$

Observemos finalmente que si $T(x) \notin B_j$ entonces $a_j = 0$, de modo que

$$\|T_\varepsilon(x) - T(x)\| \leq \sum_{j=1}^{N} a_j \|x_j - T(x)\| < \varepsilon.$$

□

El teorema de Schauder es consecuencia inmediata del resultado previo.

Teorema 0.1 (Schauder) *Sean E un espacio normado, $C \subset E$ convexo, cerrado y acotado y $T : C \to C$ continuo tal que $\overline{T(C)}$ es compacto. Entonces existe $x \in C$ tal que $T(x) = x$.*

Demostración: Para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ consideramos $T_n := T_\varepsilon$ y $V_n := V_\varepsilon$ como en el lema anterior. Como C es cerrado y convexo, se cumple que $\overline{T(C)} \subset C$ y entonces $T_n(V_n \cap C) \subset V_n \cap C$. Por el teorema de Brouwer (generalizado a un convexo compacto en un espacio de dimensión finita) se deduce que T_n tiene un punto fijo $x_n \in V_n \cap C$ y, por compacidad, tomando una subsucesión podemos suponer que $T(x_n)$ converge a cierto $x \in C$. Luego

$$\|T(x_n) - x_n\| = \|T(x_n) - T_n(x_n)\| \leq \frac{1}{n},$$

de donde se obtiene que $x_n \to x$ y luego $T(x) = x$.

□

Como corolario inmediato, obtenemos la extensión del teorema de Peano para el caso de ecuaciones con retardo.

Teorema 0.2 *Sea $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ compacta. Dado $R > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ con $\|\phi\|_\infty \leq R$ el problema*

$$X'(t) = F(t, X_t), \qquad X_{t_0} = \phi$$

tiene al menos una solución definida en $[t - \tau, t_0 + \delta]$.

Pero más allá de esta aplicación específica, el teorema de Schauder resulta de utilidad para diversos problemas; en particular, para la búsqueda de soluciones periódicas, es decir, tales que $X(t + T) = X(t)$ para un cierto valor $T > 0$, denominado período. A tal fin, la idea que mejor refleja el aspecto dinámico del problema es, sin duda, el *operador de Poincaré*. Para el caso de un sistema de ecuaciones ordinarias

$$X'(t) = f(t, X(t))$$

se trata simplemente de resolver el problema con una condición inicial $X(t_0) = X_0$ y dejar que evolucione el sistema hasta que -con un poco de suerte- al cabo de un tiempo T volvamos a encontrarnos en el estado X_0. Claro que esto no es simplemente cuestión de buena puntería, sino que se define un operador P que, para cada valor inicial X_0 calcula la solución correspondiente evaluada en $t_0 + T$. Claro que esto esconde algunas dificultades: por un lado, para poder definir $P(X_0)$ la solución debe estar definida en $[t_0, t_0 + T]$, cosa que no siempre es fácil saber de antemano: en otras palabras, el dominio de P puede ser difícil de determinar. Por otro lado, encontrar un punto fijo de P (es decir, cierto X_0 tal que $P(X_0) = X_0$) no garantiza que tengamos realmente una solución T-periódica a menos que pidamos, por ejemplo, que f sea una función T-periódica en la variable t. En tal caso, si definimos $Y(t) = X(t+T)$ vale que $Y(t_0) = X(t_0 + T) = X_0$ y además

$$Y'(t) = X'(t+T) = f(t+T, X(t+T)) = f(t, Y(t)),$$

de donde se deduce por unicidad que $X = Y$. Notemos, además, que la continuidad respecto del dato inicial nos dice que P es una función continua, asi que tenemos todo lo que necesitamos... solo falta encontrar un conjunto en donde se pueda asegurar que P tiene un punto fijo.

En algunos casos, esto resulta sorprendentemente fácil: a modo de ejemplo elemental, consideremos la ecuación escalar

$$x'(t) + x(t) = \text{sen}(t) f(x(t))$$

para cierta f localmente Lipschitz. Por variación de los parámetros, obtenemos la siguiente fórmula para la solución con condición inicial $x(0) = x_0$:

$$x(t) = x_0 e^{-t} + \int_0^t e^s \text{sen}(s) f(x(s))\, ds,$$

que por el momento no parece servir demasiado porque no sabemos nada sobre f. Pero si por ejemplo pedimos que f sea una función acotada, la cosa cambia: en efecto, vale

$$|x(2\pi) - x_0 e^{-2\pi}| \leq \int_0^{2\pi} e^s |f(x(s))|\, ds \leq C$$

para cierta constante C; de esta forma, si $|x_0| \leq R$ para R grande se ve que $|x(2\pi)| \leq R$ y por el teorema de Brouwer (que en este caso es Bolzano) existe x_0 tal que $x(2\pi) = x_0$. El mismo resultado vale si f no es acotada pero sublineal y, por supuesto, se extiende de modo inmediato a sistemas.

La cosa se complica cuando se trata de una ecuación con retardo, aunque en el fondo no tanto ya que... habemus Schauder.

References

[1] C. Rogers: A Less Strange Version of Milnors Proof of Brouwers Fixed-Point Theorem. The American Mathematical Monthly, Vol. 87, 7 (1980), 525-52.