Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase $7+\varepsilon$, versión preliminar (las críticas son bienvenidas)

En la clase previa estudiamos la ecuación característica de un sistema lineal general del tipo

$$X'(t) = L(X_t),$$

donde $L : C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n$ es lineal y continua y $X_t : [-\tau, 0] \to \mathbb{C}^n$ está dada por $X_t(\theta) = X(t+\theta)$. Esto incluye los sistemas lineales con retardo discreto aunque, como vimos, abarca también casos en los que el método de pasos no es aplicable para resolver el problema de encontrar una solución con una condición inicial ϕ. Cabe preguntarse, entonces, si son válidas las siguientes afirmaciones, intuitivamente 'razonables':

- Existe solución.
- La solución es única.
- La solución está definida en $[-\tau, +\infty)$.

En lo que sigue vamos a extender los resultados habituales para sistemas de ecuaciones ordinarias a situaciones generales, del tipo

$$X'(t) = F(t, X_t). \tag{1}$$

Cuando analizamos la ecuación característica para sistemas lineales, resultó de utilidad pensar directamente en funciones a valores complejos; sin embargo, en lo que sigue podemos estudiar sin pérdida de generalidad el caso real. En consecuencia, supondremos que $F : \mathbb{R}\times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ cumple aquello que uno suele llamar vagamente 'hipótesis apropiadas', entre las cuales seguramente aparecerá en algún lado el nombre propio 'Lipschitz'. Pero antes, para fijar ideas, consideremos una vez más el caso de retardo discreto

$$X'(t) = f(t, X(t), X(t-\tau))$$

para $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, con una condición inicial que, como ya vimos, debe ser una función definida en un intervalo de longitud τ. Y, como la idea de encontrar soluciones maximalmente definidas consiste en "pegar" soluciones definidas en intervalos chicos, conviene pensar que dicho intervalo no es necesariamente $[-\tau, 0]$. Claramente, podríamos suponer entonces que ϕ es una función continua definida en cierto intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$ y obtener nuestros resultados a partir de allí, aunque resultará más cómodo (y, de paso, más interesante) entender la cuestión a partir de la filosofía de los sistemas dinámicos. A tal fin recordemos que, dado un sistema de ecuaciones ordinarias $X'(t) = f(t, X(t))$ con f continua y localmente Lipschitz, se define el flujo $\Phi(t, t_0, X_0)$ como $X(t)$, donde X es la única solución con condición inicial $X(t_0) = X_0$. En otras palabras, para cada instante t, la función Φ describe la evolución del sistema a partir del estado inicial X_0 dado en el instante inicial t_0; la ecuación diferencial es, ni más ni menos, la ley según la cual evoluciona dicho sistema. En el caso de una ecuación con retardo, los 'estados' ya no son vectores de $\mathbb{R}^n$ sino *funciones*, pues la ley de evolución en cada instante t depende de X_t; en otras palabras, las trayectorias son ahora curvas $\gamma(t) := X_t$ trazadas sobre el espacio de dimensión infinita $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. Bajo este punto de vista, la manera apropiada de definir una condición inicial consiste simplemente en decir cuál es el estado del sistema en el instante t_0, vale decir:

$$X_{t_0} = \phi \tag{2}$$

para cierta $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$.

Buscamos una solución, es decir, una función X continua definida en cierto intervalo $[t_0 - \tau, t_0 + \delta]$ que cumpla la condición inicial (2) y además satisfaga la ecuación para $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. Como dice el tango, siempre se vuelve al primer amor: en este caso, el método de pasos, que garantiza la existencia de una única solución del problema

$$X'(t) = f(t, X(t), \phi(t - t_0 - \tau)), \qquad X(t_0) = \phi(0)$$

si se pide que f sea localmente Lipschitz respecto de X (es decir, la dependencia respecto de $X(t - \tau)$ puede ser solo continua). En principio, el valor $\delta \in (0, \tau]$ puede ser muy pequeño, pero si la solución está definida hasta el valor $\delta = \tau$ entonces se repite el procedimiento para extender la solución un poco más a la derecha y así sucesivamente. Además, si X está definida en cierto $[t_0 - \tau, t_0 + \delta)$ y no se puede extender, necesariamente debe 'explotar', es decir, $\|X(t)\| \to \infty$ para $t \to (t_0 + \delta)^-$. Para ver esto, alcanza con tomar $k = \left[\frac{\delta}{\tau}\right]$ y observar que X es la (única) solución del sistema de ecuaciones *ordinarias*

$$Y'(t) = f(t, Y(t), X(t - \tau)), \qquad Y(t_0 + k\tau) = X(t_0 + k\tau)$$

y no se puede extender hacia la derecha.

En el caso general, diremos que la función $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz respecto de X si para todo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y todo $M > 0$ existe una constante L tal que

$$\|F(t, \phi) - F(t, \psi)\| \leq L\|\phi - \psi\|_\infty$$

para todo $t \in I$ y todas las funciones $\phi, \psi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ que verifican $\|\phi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \leq M$. Si bien esto no implica continuidad respecto de t, por simplicidad siempre supondremos que F es continua. Por ejemplo, si F es lineal en su segunda variable entonces la constante L depende solo de I, pues

$$\|F(t, \phi) - F(t, \psi)\| = \|F(t, \phi - \psi)\| \leq C(t)\|\phi - \psi\|_\infty,$$

donde $C(t) := \sup_{\|\phi\|_\infty=1} \|F(t,\phi)\|$. Es fácil verificar que existe una constante L tal que $C(t) \leq L$ para todo $t \in I$: en efecto, en caso contrario existen t_n y ϕ_n con $\|\phi_n\|_\infty = 1$ tales que $\|F(t_n,\phi_n)\| \geq n$. Podemos suponer que $t_n \to t$ para algún t, luego tomando $\psi_n := \frac{\phi_n}{\sqrt{n}}$ se tiene que $F(t_n,\psi_n) \to F(t,0)$ pero $\|F(t_n,\psi_n)\| \geq \sqrt{n}$, lo que es absurdo. En otras palabras, F es *globalmente* Lipschitz en $I \times C([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$.

Para cualquier ϕ dada, buscar una solución del problema con la condición inicial $X_{t_0} = \phi$ equivale a encontrar una función X en el espacio

$$E := \{X \in C([t_0-\tau, t_0+\delta], \mathbb{R}^n) : X_{t_0} = \phi\}$$

que verifica

$$X(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, X_s)\, ds \qquad \text{para } t > t_0.$$

Aunque parezca una obviedad, es oportuno aclarar que la integral está bien definida, pues la función $s \mapsto F(s,X_s)$ es continua. Para esto, basta observar que se trata de la composición de F con la trayectoria $s \mapsto (s,X_s)$, que resulta continua debido a la continuidad uniforme de X.[1]

Teorema 0.1 *Sea F como antes, continua y localmente Lipschitz respecto de X. Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ y $R > 0$ existe $\delta > 0$ que depende solo de t_0 y R tal que para toda $\phi \in C([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$ tal que $\|\phi\|_\infty \leq R$ existe una única solución $X = X(t,\phi)$ del problema definida en $[t_0-\tau, t_0+\delta]$.*

Demostración: Buscamos un punto fijo del operador $T : E \to E$ definido por

$$TX(t) := \begin{cases} \phi(t-t_0) & t \leq t_0 \\ \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s,X_s)\, ds & t > t_0. \end{cases}$$

Para ello veremos que, eligiendo δ de manera apropiada, existe alguna bola cerrada B del espacio E tal que $T(B) \subset B$ y además $T : B \to B$ es una contracción. Cabe destacar que más tarde veremos cómo extender las soluciones hacia la derecha, de modo que en esta demostración no nos interesa encontrar valores óptimos de δ. Por eso podemos, por ejemplo, 'planificar' de antemano que $\delta \leq \tau$ y que $B = \overline{B_{2R}(0)}$, es decir, la bola cerrada de radio $2R$ centrada en 0. Observemos que si $\|X\|_\infty \leq 2R$ entonces para $t > t_0$ vale

$$\|TX(t)\| \leq \|\phi(0)\| + \int_{t_0}^{t} \|F(s,X_s)\|\, ds \leq R + \delta C,$$

donde

$$C \geq \sup_{t_0 \leq t \leq t_0+\tau, \|\psi\| \leq 2R} \|F(t,\psi)\|.$$

[1] En efecto, dado $\varepsilon > 0$ se puede elegir $\eta > 0$ tal que

$$\|X_s - X_{\tilde{s}}\|_\infty = \sup_{\theta \in [-\tau,0]} \|X(s+\theta) - X(\tilde{s}+\theta)\| < \varepsilon$$

si $|s-\tilde{s}| < \eta$. Como dijimos, se trata de una obviedad, aunque deja una ligera sensación de inquietud ante la idea de extender estos resultados para el caso de retardos infinitos.

Aparece aquí un detalle importante, que marca una nueva diferencia con el caso sin retardo: ¿cómo sabemos que el supremo de la última desigualdad existe? El hecho de que F sea continua no es suficiente pues B, por más bola que sea, no es un conjunto compacto. Sin embargo, podemos tomar la constante de Lipschitz L correspondiente al intervalo $I = [t_0, t_0 + \tau]$ y el valor $M = 2R$ para obtener, para $\psi \in B$:

$$\|F(t, \psi)\| \leq \|F(t, \psi) - F(t, 0)\| + \|F(t, 0)\| \leq L\|\psi\|_\infty + \|F(t, 0)\|$$

para todo $t \in I$. Y ahora ya no hay más sorpresas pues felizmente I sigue siendo compacto, de modo que

$$\|F(t, \psi)\| \leq 2RL + \sup_{t \in I} \|F(t, 0)\| := C.$$

Volviendo a nuestro asunto, tenemos entonces que $\|TX(t)\| \leq R + \delta C$ para $t > t_0$ y además $TX_{t_0} = \phi$, de modo que $\|TX(t)\| \leq R$ para $t \leq t_0$. De esta forma, si elegimos $\delta \leq \frac{R}{C}$ se verifica que $\|TX\|_\infty \leq 2R$, es decir, $T(B) \subset B$.

Por otra parte, para $X, Y \in B$ se tiene que $TX(t) = TY(t)$ si $t \leq t_0$, mientras que para $t > t_0$ vale

$$\|TX(t) - TY(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|F(s, X_s) - F(s, Y_s)\| \, ds \leq \int_{t_0}^{t} L\|X_s - Y_s\|_\infty \, ds$$

y, en consecuencia

$$\|TX - TY\|_\infty \leq \delta L\|X - Y\|_\infty.$$

Aquí el lector experimentado diría que podemos achicar δ de manera que $\delta L < 1$; de esta forma, T resulta una contracción y tiene un (único) punto fijo en B. Esto es cierto, con la única observación de que ya podemos dejar al valor δ tranquilo sin que hagan falta más (por así decirlo) recortes: con la anterior elección $\delta = \min\{\tau, \frac{R}{C}\}$ alcanza, ya que $C \geq 2RL$ y entonces $\delta L \leq \frac{1}{2}$.

Resta ver la unicidad ya que (vale la pena aclararlo) el teorema de punto fijo de Banach garantiza que la solución es única en el conjunto B, pero en principio podría haber soluciones con norma 'grande'. Inspirados en el caso sin retardo, podemos intentar usar una desigualdad del tipo Gronwall, aunque debemos tener algo de cuidado. En efecto, si Y es otra solución, es claro que coincide con X para $t \leq t_0$, mientras que para $t > t_0$ resulta, como antes

$$\|X(t) - Y(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|F(s, X_s) - F(s, Y_s)\| \, ds.$$

Claro que el valor L ya no sirve, pero podemos considerar una nueva constante de Lipschitz $\tilde{L}$ correspondiente al mismo intervalo I y M el máximo entre $\|Y\|_\infty$ y $2R$, de modo que

$$\|X(t) - Y(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \tilde{L}\|X_s - Y_s\|_\infty \, ds.$$

La desigualdad de Gronwall no se aplica directamente pues la función que aparece en el integrando no es la misma que aparece en el término de la izquierda; sin embargo, basta observar que

$$\|X_s - Y_s\|_\infty = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|X(s+\theta) - Y(s+\theta)\|$$

y, para $\theta \in [-\tau, 0]$,

$$\|X(t+\theta) - Y(t+\theta)\| \leq \int_{t_0}^{t} \tilde{L} \|X_s - Y_s\|_\infty \, ds.$$

En consecuencia, si

$$u(t) := \|X_t - Y_t\|_\infty = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|X(t+\theta) - Y(t+\theta)\|$$

resulta

$$u(t) \leq \int_{t_0}^{t} \tilde{L} u(s) \, ds$$

y (Gronwall, al fin) se deduce que $u \equiv 0$.

$\square$

Generalizando la última desigualdad de la demostración anterior se deduce el siguiente resultado de continuidad respecto de la condición inicial:

Corolario 0.1 *Sea F continua y localmente Lipschitz respecto de X y consideremos, para $t_0 \in \mathbb{R}$, $R > 0$ fijos, los valores L y δ del teorema anterior. Dadas $\phi, \psi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ con $\|\phi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \leq R$, se cumple, para todo $t \in [t_0, t_0 + \delta]$:*

$$\sup_{t-\tau \leq s \leq t} \|X(s, \phi) - X(s, \psi)\| \leq \|\phi - \psi\|_\infty e^{L(t-t_0)}.$$

Demostración: De acuerdo con el teorema previo, tanto $X(\cdot, \phi)$ como $X(\cdot, \psi)$ pertenecen a la bola B. Como antes, tomamos

$$u(t) := \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|X(t+\theta, \phi) - X(t+\theta, \psi)\|$$

y resulta

$$u(t) \leq \|\phi - \psi\|_\infty + \int_{t_0}^{t} L u(s) \, ds,$$

de donde

$$u(t) \leq \|\phi - \psi\|_\infty e^{L(t-t_0)}.$$

$\square$

De acuerdo con los resultados anteriores, para toda ϕ existe un intervalo maximal I_ϕ, que claramente es abierto, en el que $X(\cdot, \phi)$ está definida y no puede extenderse hacia la derecha. Sin embargo, a diferencia del caso sin retardo, si este intervalo es acotado eso no significa que necesariamente $\|X(t)\| \to \infty$ cuando t se acerca a su extremo superior de I_ϕ. Pero sí vale, como es de esperar, que el 'estado' X_t tiende a infinito dentro del espacio de funciones:

Teorema 0.2 *Sea F continua y localmente Lipschitz respecto de X. Supongamos que X es una solución definida en $[t_0 - \tau, A)$ que no se puede extender, entonces $\|X_t\|_\infty \to \infty$ para $t \to A$.*

<u>*Demostración*</u>: Supongamos que existen $t_n \nearrow A$ y $R > 0$ tales que $\|X_{t_n}\|_\infty \leq R$. Repasando la demostración del teorema de existencia, vemos que la elección del valor δ se puede hacer independiente de t_n, fijando por ejemplo la constante L de Lipschitz y luego la constante C correspondientes al intervalo $I = [t_1, A + \tau]$ y $M = 2R$. Luego, podemos definir Y como la única solución del problema $Y'(t) = F(y, Y_t)$ con condición inicial $Y_{t_n} = X_{t_n}$. Para n suficientemente grande, Y está definida un poco a la derecha de A; además, por unicidad resulta que $Y = X$ para $t \geq t_n$, lo que es absurdo.

$\square$

Por ejemplo, las soluciones de ecuaciones lineales están globalmente definidas, vale decir, se extienden al intervalo $[-\tau, +\infty)$. Esto se puede ver en forma directa (ver ejercicio de la práctica) o como consecuencia del siguiente resultado más general:

Teorema 0.3 *Sea F continua y localmente Lipschitz respecto de X y supongamos que F es sublineal en X, es decir, existen $a, b \geq 0$ localmente integrables tales que*

$$\|F(t, \phi)\| \leq a(t)\|\phi\|_\infty + b(t)$$

para todo t y toda ϕ. Entonces $X(\cdot, \phi)$ está globalmente definida para toda $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$.

<u>*Demostración*</u>: Escribiendo

$$X(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, X_s)\, ds$$

para $t > t_0$ resulta

$$\|X(t)\| \leq \|\phi\|_\infty + \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} a(s)\|X_s\|_\infty\, ds.$$

Como antes, se deduce que

$$\|X_t\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty + \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} a(s)\|X_s\|_\infty\, ds$$

y por Gronwall

$$\|X_t\|_\infty \leq \left(\|\phi\|_\infty + \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds\right) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}.$$

En consecuencia, X_t no puede 'explotar' en ningún intervalo acotado. $\square$