Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 6, versión preliminar (las críticas son bienvenidas)

En la última clase comenzamos a extender los resultados obtenidos para la ecuación escalar a sistemas de la forma

$$X'(t) = AX(t) + BX(t - \tau)$$

para $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, cuya ecuación característica resulta

$$h(\lambda) := \det\left(\lambda I - A - e^{-\tau\lambda}B\right) = 0.$$

Como vimos si el retardo es chico entonces las raíces características están cerca de los autovalores de $A+B$ o bien tienen parte real menor que todos ellos. Más precisamente,

Teorema 0.1 *Sean $z_1, \ldots, z_k$ todos los autovalores de la matriz $A+B$ y sean $\delta > 0$ y $s < \mathrm{Re}(z_j)$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Entonces existe $\tau_* > 0$ tal que si $0 < \tau < \tau_*$ y $h(\lambda) = 0$ se cumple:*

$$\mathrm{Re}(\lambda) < s \quad \textit{o bien} \quad |\lambda - z_j| < \delta \ \textit{para algún } j.$$

Esto garantiza, para valores chicos de τ, la estabilidad asintótica en caso de que los autovalores de $A+B$ tengan parte real negativa mientras que, por otra parte, si algún autovalor simple de $A+B$ tiene parte real positiva, entonces el sistema es inestable:

Corolario 0.1 *Sean A, B y $\{z_j\}_{j=1,\ldots,k}$ como antes. Entonces se cumple:*

1. *Si $\mathrm{Re}(z_j) < 0$ para todo j, entonces existe $\tau_* > 0$ tal que el origen es un equilibrio asintóticamente estable para $0 < \tau < \tau_*$.*

2. *Si z_j es simple y $\mathrm{Re}(z_j) > 0$ para algún j, entonces existe $\tau_* > 0$ tal que el origen es inestable para $0 < \tau < \tau_*$.*

Demostración:

1. Basta con tomar $\delta := -\max\{\mathrm{Re}(z_j) : j = 1, \ldots, k\}$ y aplicar el teorema anterior.

2. Consideremos $h_\tau(z) = \det(zI - A - e^{\tau z}B) = H(z,\tau)$, vale decir, como función de z y τ. Es claro que $H : \mathbb{C}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es de clase C^1 y vale $H(z_j, 0) = 0$. Por otra parte, z_j es raíz simple de h_0, de modo que $\frac{\partial H}{\partial z}(z_j, 0) = h_0'(z_j) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, para cada valor pequeño de τ existe una raíz $z(\tau)$ con $\mathrm{Re}(z(\tau)) > 0$.

$\square$

Observación 0.1 *El Teorema 0.1 sigue valiendo para $A(\tau)$ y $B(\tau)$ funciones continuas de τ, con z_j los autovalores de $A(0) + B(0)$. Y también vale el corolario, aunque para la segunda parte requiere una aclaración adicional, pues si A y B no son de clase C^1 entonces el teorema de la función implícita no se aplica en forma directa. Pero existe un argumento más directo, que en realidad muestra que la hipótesis de que la raíz z_j sea simple es innecesaria. Supongamos $\mathrm{Re}(z_j) = r > 0$ y veamos que para τ chico la función $H(\cdot,\tau)$ se anula en $B_r(z_j)$. En efecto, si esto no vale entonces existe $\tau_n \to 0$ tal que $g_n := H(\cdot,\tau_n)$ no se anula en $B_r(z_j)$. Es claro (ejercicio) que g_n converge uniformemente en $B_r(z_j)$ a $H(\cdot, 0)$, que no es constante y se anula en z_j, lo que contradice el teorema de Hurwitz.*

Observación 0.2 *En particular, para $n = 1$ se obtiene, para τ chico, que si $a+b < 0$ entonces el origen es asintóticamente estable y si $a+b > 0$ es inestable, pues la única raíz $z = a + b$ es obviamente simple. Esta conclusión concuerda (aunque es más débil) con lo que habíamos obtenido en forma directa unas clases atrás.*

Los resultados obtenidos pueden extenderse para otros sistemas lineales: por ejemplo, ecuaciones con varios retardos, o con retardos distribuidos. Podemos considerar en general un sistema lineal autónomo de la forma

$$X'(t) = L(X_t)$$

donde $X_t(\theta) := X(t+\theta)$ y $L : C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n$ es lineal y continua, es decir, existe una constante c tal que

$$\|L(\phi)\| \leq c\|\phi\|_\infty$$

para toda ϕ, donde $\|\cdot\|$ denota cualquier norma de $\mathbb{C}^n$. En el caso de retardo discreto, $X'(t) = AX(t) + BX(t-\tau)$ se tiene $L(\phi) = A\phi(0) + B\phi(-\tau)$, donde A y B son matrices fijas y vale

$$\|L(\phi)\| \leq |\phi(0)|\|A\| + |\phi(-\tau)|\|B\| \leq c\|\phi\|_\infty,$$

con $c = \|A\| + \|B\|$.

Cabe observar que en esta situación general ya no se puede aplicar el método de pasos para resolver la ecuación con una condición inicial; más adelante veremos que de todas formas dicha solución existe y está definida para todo $t > 0$. De todas formas, por ahora nos ocuparemos únicamente de obtener la ecuación característica y extender lo visto para el caso particular de retardo discreto. A tal fin, buscaremos soluciones particulares de la forma

$$X(t) = e^{\lambda t} V \qquad \lambda \in \mathbb{C},\, V \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

Por comodidad, definimos la función $\exp_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\exp_\lambda(\theta) := e^{\lambda\theta}$, de modo que $X_t = e^{\lambda t}\exp_\lambda V$, pues $X_t(\theta) = X(t+\theta) = e^{\lambda t}\exp_\lambda(\theta)V$. Luego, X es solución si y solo si

$$\lambda e^{\lambda t} V = L(X_t) = e^{\lambda t} L(\exp_\lambda V)$$

para todo t; equivalentemente:

$$L(\exp_\lambda V) = \lambda V.$$

Esta ecuación puede pensarse como un problema de autovalores y autovectores, ya que si escribimos $V = \sum_{j=1}^n v_j e_j$, con $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^n$, resulta

$$L(\exp_\lambda V) = \sum_{j=1}^n v_j L(\exp_\lambda e_j) = L_\lambda V$$

donde L_λ es la matriz cuyas columnas son $L(\exp_\lambda e_j)$ y (sin previo aviso) escribimos los vectores como columnas. En otras palabras, $X = e^{\lambda t}V$ es solución si y solo si V es un autovector de autovalor λ de la matriz L_λ. Claro que, a diferencia de los problemas clásicos de autovalores y autovectores, la matriz L_λ también depende de λ y, en general, la ecuación característica no es polinomial. Precisamente, podremos asegurar que existe algún autovector $V \neq 0$ si y solo si $h(\lambda) = 0$, donde

$$h(\lambda) := \det(\lambda I - L_\lambda).$$

Por ejemplo, para el sistema con un retardo discreto tenemos

$$L(\exp_\lambda e_j) = \exp_\lambda(0) A e_j + \exp_\lambda(-\tau) B e_j = Col_j(A) + e^{-\tau\lambda} Col_j(B),$$

es decir, $L_\lambda = A + e^{-\tau\lambda}B$ y

$$h(\lambda) = \det(\lambda I - A - e^{-\tau\lambda} B).$$

En general, se puede probar que h cumple propiedades análogas a las que vimos en el caso escalar con retardo discreto. En principio, que resulta una función entera:

Proposición 0.1 $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es analítica.*

<u>*Demostración*</u>:

Como det consiste únicamente de sumas y productos, y λI es trivialmente analítica, basta ver que cada coeficiente de la matriz L_λ es una función analítica. La columna j-ésima $C_j(\lambda)$ de esta matriz es $L(\exp_\lambda e_j)$, de modo que podemos calcular

$$\frac{C_j(\lambda+\kappa) - C_j(\lambda)}{\kappa} = L\left(\frac{\exp_{\lambda+\kappa} - \exp_\lambda}{\kappa} e_j\right).$$

Pero

$$\frac{\exp_{\lambda+\kappa}(\theta)-\exp_\lambda(\theta)}{\kappa}=e^{\lambda\theta}\frac{e^{\kappa\theta}-1}{\kappa}\to\theta e^{\lambda\theta}$$

para $\kappa\to 0$, uniformemente en $\theta\in[-\tau,0]$. Esto implica que

$$\frac{C_j(\lambda+\kappa)-C_j(\lambda)}{\kappa}\to L(\varphi_\lambda e_j),$$

donde $\varphi_\lambda(\theta):=\theta e^{\lambda\theta}$. □

Una consecuencia es que, tal como vimos para el caso escalar, a la derecha de cualquier recta vertical en el plano complejo h tiene a lo sumo un número finito de raíces. En efecto, si λ_n son raíces de h tales que $\mathrm{Re}(\lambda_n)>a$ entonces $|\lambda_n|\to+\infty$ y además, como $\det(\lambda_n I-L_{\lambda_n})=0$, la matriz $I-\frac{1}{\lambda_n}L_{\lambda_n}$ no es inversible. Pero

$$\|Col_j(L_{\lambda_n})\|=\|L(\exp_{\lambda_n}e_j)\|\le c\|\exp_{\lambda_n}e_j\|_\infty=c\|\exp_{\lambda_n}\|_\infty$$

y además

$$|\exp_{\lambda_n}(\theta)|=|e^{\lambda_n\theta}|=e^{\mathrm{Re}(\lambda_n)\theta}\le e^{a\theta}\le\max\{1,e^{-a\tau}\}$$

para todo $\theta\in[-\tau,0]$. Luego L_{λ_n} es acotada y entonces $I-\frac{1}{\lambda_n}L_{\lambda_n}$ es inversible para n grande, lo que es absurdo.

Para concluir, veamos un resultado concerniente a la *estabilidad absoluta*, es decir, independiente del retardo. Para el caso escalar $u'(t)=au(t)+bu'(t)$ vimos que esto ocurre en la región $\{a+b<0, a\le b\}$; en el caso general, es difícil obtener resultados tan precisos pero, sin embargo, en un gran número de situaciones es posible determinar condiciones suficientes para la estabilidad absoluta. Concretamente, supongamos que la ecuación característica es de la forma

$$p(\lambda)+q(\lambda)e^{-\tau\lambda}=0, \tag{1}$$

con p,q polinomios con coeficientes reales tales que $gr(p)>gr(q)$. Por ejemplo, esto ocurre en un sistema $X'(t)=AX(t)+BX(t-\tau)$ con $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ si se establecen condiciones apropiadas para la matriz B (en el caso $n=2$, basta pedir $det(B)=0$, ver ejercicio de la práctica 1). Otro ejemplo frecuente es en la ecuación de orden n con coeficientes reales y un retardo discreto

$$x^{(n)}(t)+\sum_{j=1}^{n-1}a_jx^{(j)}(t)+b_jx^{(j)}(t-\tau)=0,$$

cuya ecuación característica es de la forma anterior, con $p(\lambda)=\lambda^n+\sum_{j=1}^{n-1}a_j\lambda^j$ y $q(\lambda)=\sum_{j=1}^{n-1}b_j\lambda^j$. Esto se puede calcular de manera directa proponiendo soluciones $x(t):=e^{\lambda t}$ o (si uno está deseoso de hacer más cuentas) llevando la ecuación a un sistema por medio de la clásica transformación

$$x_1:=x \qquad x_2=x' \qquad \dots \qquad x_n:=x^{(n-1)}$$

a partir de la que se obtienen las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -b_0 & -b_1 & \dots & \dots & \dots & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

y se verifica que $\det(\lambda I - A - e^{-\lambda\tau}B) = p(\lambda) + q(\lambda)e^{-\lambda\tau}$ con p y q como antes.

Proposición 0.2 *Sean $p, q \in \mathbb{R}[X]$ tales que*

1. *p no se anula en $\{\mathrm{Re}(z) \geq 0\}$.*
2. *$|q(iy)| < |p(iy)|$ para $y \geq 0$.*
3. *$gr(p) > gr(q)$.*

Entonces, para todo $\tau \geq 0$, todas las soluciones de la ecuación (1) tienen parte real negativa.

Demostración: En primer lugar, observemos que $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$, de modo que la segunda condición se verifica en realidad sobre todo el eje imaginario. Consideremos el semicírculo $D_R := \{z : |z| \leq R, \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$. Para R grande, se cumple que $\frac{|q(z)|}{|p(z)|} < 1$ si $|z| = R$ y, por la condición 2 se deduce que $\frac{|q(z)|}{|p(z)|} < 1$ en ∂D_R. Como p no se anula sobre D_R, el principio del módulo máximo asegura que la anterior desigualdad vale en D_R y, en consecuencia, para todo z con parte real no negativa. Si λ es solución de (1) tal que $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, entonces $q(\lambda) \neq 0$ (pues $p(\lambda) \neq 0$) y

$$1 < \frac{|p(\lambda)|}{|q(\lambda)|} = |e^{-\tau\lambda}| = e^{-\tau \mathrm{Re}(\lambda)} \leq 1,$$

lo que es absurdo.

$\square$

Para la ecuación de orden n, observemos que si el retardo solamente aparece en el término de orden 0 entonces q es constante. Para este caso, el resultado anterior se puede mejorar cuando todas las raíces de p (eventualmente múltiples) están en $\mathbb{R}_{<0}$:

Proposición 0.3 *Sean $p \in \mathbb{R}[X]$ mónico y $q \equiv c$. Supongamos*

1. *Todas las raíces de p son números reales negativos.*

2. $|p(0)| > |c|$.

Entonces, para todo $\tau \geq 0$, todas las soluciones de la ecuación (1) tienen parte real negativa.

Demostración: Escribiendo $p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_j)$ se deduce, para cualquier λ solución de (1):

$$\prod_{j=1}^{n} |\lambda - \lambda_j| = |c|e^{-\mathrm{Re}(\lambda)\tau}$$

Como $\lambda_j < 0$, para $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ vale $|\lambda - \lambda_j| \geq |\lambda_j|$ y entonces

$$|p(0)| = \prod_{j=1}^{n} |\lambda_j| \leq |c|,$$

lo que es absurdo. $\square$

En el caso escalar, se tiene que $h(\lambda) = \lambda - a - be^{\lambda\tau}$, es decir: $p(\lambda) = \lambda - a$ y $q \equiv b$. El resultado previo dice, entonces, que si $a < 0$ y $a + |b| < 0$ entonces hay estabilidad absoluta. Dejando de lado la semirrecta $a = b < 0$, este resultado coincide exactamente con lo obtenido en la clase 3.

Observación 0.3 *Se puede probar, también para el caso general, que si todos los autovalores de la ecuación característica tienen parte real negativa entonces el origen es asintóticamente estable.*