Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 5, versión preliminar (las críticas son bienvenidas)

En la clase previa obtuvimos una fórmula de variación de los parámetros para expresar la solución $u(t,\phi,f) = u(t,\phi,0) + u(t,0,f)$ de la ecuación lineal

$$u'(t) = au(t) + bu(t-\tau) + f(t)$$

con condición inicial $\phi \in C([-\tau,0])$. Veamos ahora cómo aplicar dicha fórmula para estudiar la estabilidad del origen en ecuaciones lineales perturbadas de la forma

$$u'(t) = au(t) + bu(t-\tau) + f(u(t), u(t-\tau)),$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función suave tal que

$$f(0,0) = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

Según mencionamos, esto permitirá analizar la estabilidad de los equilibrios para ecuaciones más generales via linealización.

Dado $\varepsilon > 0$, fijemos $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $\|(x,y)\| \leq \delta_\varepsilon$ entonces $|f(x,y)| \leq \varepsilon(|x| + |y|)$. Por la fórmula de variación de los parámetros, la solución del problema anterior con una condición inicial ϕ puede escribirse como

$$u(t) = u(t,\phi,0) + \int_0^t K(t-s) f(u(s), u(s-\tau))\, ds.$$

Supongamos que $|u(s)| \leq \delta_\varepsilon$ para $s \leq t$, entonces resulta

$$|u(t) - u(t,\phi,0)| \leq \varepsilon k \int_0^t e^{\mu(t-s)}(|u(s)| + |u(s-\tau)|)\, ds \tag{1}$$

con k como en la clase previa y $\mu > \mathrm{Re}(\lambda)$ para toda raíz característica λ. Observemos ahora que

$$\int_0^t e^{\mu(t-s)}|u(s-\tau)|\, ds = e^{-\mu\tau} \int_{-\tau}^{t-\tau} e^{\mu(t-s)}|u(s)|\, ds$$

$$\leq e^{-\mu\tau} \left(\int_{-\tau}^0 e^{\mu(t-s)}|\phi(s)|\, ds + \int_0^t e^{\mu(t-s)}|u(s)|\, ds \right)$$

$$\leq e^{-\mu\tau}\left(\|\phi\|_\infty e^{\mu t}\frac{e^{\mu\tau}-1}{\mu}+\int_0^t e^{\mu(t-s)}|u(s)|\,ds\right),$$

En consecuencia,

$$|u(t)-u(t,\phi,0)|\leq C\|\phi\|_\infty e^{\mu t}+\varepsilon D\int_0^t e^{\mu(t-s)}|u(s)|\,ds$$

para $C:=\frac{1-e^{-\mu\tau}}{\mu}$, $D=1+e^{\mu\tau}$. Luego, tomando ρ como en la clase previa se deduce que

$$|u(t)|\ \leq(\rho+C)\|\phi\|_\infty e^{\mu t}+\varepsilon D\int_0^t e^{\mu(t-s)}|u(s)|\,ds$$

y luego, llamando $v(t):=e^{-\mu t}u(t)$, vale

$$|v(t)|\leq(\rho+C)\|\phi\|_\infty+\varepsilon D\int_0^t|v(s)|\,ds.$$

Entonces $|v(t)|\leq(\rho+C)\|\phi\|_\infty e^{\varepsilon Dt}$, es decir:

$$|u(t)|\leq(\rho+C)\|\phi\|_\infty e^{(\varepsilon D+\mu)t}.$$

De esta forma, se obtiene:

Teorema 0.1 *Sea f como antes y sea $h(\lambda)=\lambda-a-be^{-\lambda\tau}$. Supongamos $\mathrm{Re}(\lambda)<0$ para toda λ raíz de h. Entonces $u\equiv 0$ es (localmente) asintóticamente estable.*

Demostración: Fijando $\mu<0$ tal que $\mu>\sup\{\mathrm{Re}(\lambda)\}$, definimos C y D como antes y elegimos $\varepsilon>0$ tal que $\varepsilon D+\mu<0$. Tomando $\delta<\delta_\varepsilon$ tal que $\delta\leq\frac{\delta_\varepsilon}{\rho+C}$ resulta, para $\|\phi\|_\infty\leq\delta$, que si u es una solución con condición inicial ϕ entonces vale

$$|u(t)|\leq\delta_\varepsilon e^{(\varepsilon D+\mu)t}\tag{2}$$

para todo t. En efecto, consideremos $J:=\{t:|u(s)|\leq\delta_\varepsilon\ \text{para}\ s\leq t\}$, que claramente es un intervalo cerrado y no vacío. Como $\delta<\delta_\varepsilon$, el intervalo J se extiende a la derecha del 0. Dado $t_0>0$ tal que $t_0\in J$, la cuenta anterior dice que vale (2) en $[-\tau,t_0]$ y, en particular, $|u(t_0)|\leq\delta_\varepsilon e^{(\varepsilon D+\mu)t_0}<\delta_\varepsilon$. Esto prueba que la desigualdad $|u(t)|\leq\delta_\varepsilon$ sigue valiendo un poco a la derecha de t_0, vale decir, que J es abierto.

□

Observación 0.1 *En rigor, el resultado previo dice solamente que si u es una solución definida en el intervalo $[-\tau,T]$ entonces vale (2) para $t\leq T$. Como veremos, si f es localmente Lipschitz, esto garantiza que u está definida en $[-\tau,+\infty)$ y la desigualdad anterior vale para todo t.*

Corolario 0.1 *Consideremos el problema*

$$u'(t) = F(u(t), u(t-\tau))$$

con F de clase C^1. Sea $u^* \in \mathbb{R}$ tal que $F(u^*, u^*) = 0$ y sea $h(\lambda) = \lambda - a - be^{-\lambda\tau}$, donde $(a, b) := \nabla F(u^*, u^*)$. Si todas las raíces de h tienen parte real negativa, entonces u^* es un equilibrio asintóticamente estable.

Los resultados obtenidos para la ecuación escalar pueden extenderse de manera inmediata a sistemas, de la forma

$$X'(t) = AX(t) + BX(t-\tau)$$

para $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, en cuyo caso es fácil verificar que la ecuación característica resulta

$$h(\lambda) := \det\left(\lambda I - A - e^{-\tau\lambda}B\right) = 0.$$

No haremos esto ahora pues más adelante veremos la situación más general, pero emplearemos esta fórmula para decir algo sobre la estabilidad del origen. Es claro que no se podrá hacer un estudio tan completo como en el caso escalar, aunque el siguiente resultado muestra que cuando el retardo es pequeño la situación se asemeja bastante al caso sin retardo.

Teorema 0.2 *Sean $z_1, \ldots, z_k$ todos los autovalores de la matriz $A + B$ y sean $\delta > 0$ y $s < \mathrm{Re}(z_j)$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Entonces existe $\tau_* > 0$ tal que si $0 < \tau < \tau_*$ y $h(\lambda) = 0$ se cumple:*

$$\mathrm{Re}(\lambda) < s \quad \text{o bien} \quad |\lambda - z_j| < \delta \text{ para algún } j.$$

Demostración: Consideremos el conjunto

$$C := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq s, |z - z_j| \geq \delta \text{ para todo j}\}.$$

Queremos probar que si τ es chico, entonces $h^{-1}(0) \cap C = \emptyset$. Por el absurdo, supongamos que existen $\tau_n \to 0^+$ y raíces λ_n de la función h_n correspondiente a τ_n tales que $\lambda_n \in C$. Si la sucesión $\{\lambda_n\}$ converge a cierto λ, resulta $h_0(\lambda) = 0$ para h_0 correspondiente a $\tau = 0$, es decir, $h_0(\lambda) = \lambda I - (A + B)$. Esto dice que λ es autovalor de $A + B$, lo que es absurdo pues también se verifica que $\lambda \in C$. Luego, tomando una subsucesión podemos suponer $|\lambda_n| \to \infty$ y considerar la matriz

$$M_n := I - \frac{1}{\lambda_n}\left(A + e^{-\lambda_n\tau_n}B\right).$$

Como vale $\left|e^{-\lambda_n\tau_n}\right| = e^{-\mathrm{Re}(\lambda_n)\tau_n} \leq e^{-s\tau_n} \to 0$, se deduce que la matriz M_n converge a la identidad y, en consecuencia, es inversible para n grande. Esto es absurdo, porque $\det(M_n) = \frac{h_n(\lambda_n)}{\lambda_n} = 0$.

□