Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 4, versión preliminar (las críticas son bienvenidas)

En la clase previa analizamos la estabilidad del origen para la ecuación lineal $u'(t) = au(t) + bu(t-\tau)$. Una pregunta bastante natural para quien conozca los métodos empleados en la teoría de ecuaciones ordinarias es si dicho análisis puede ser de utilidad para estudiar la estabilidad de los equilibrios de algunas ecuaciones no lineales, por ejemplo:

$$u'(t) = F(u(t), u(t-\tau)).$$

En este caso, un equilibrio es una solución constante $u = u^*$, es decir, tal que (u^*, u^*) es un cero de F. Si suponemos que F es diferenciable en dicho punto, podemos escribir la ecuación anterior como

$$u'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(u^*, u^*)(u(t) - u^*) + \frac{\partial F}{\partial y}(u^*, u^*)(u(t-\tau) - u^*) + R(u(t), u(t-\tau))$$

donde R es el resto de Taylor. En otras palabras, si definimos $v(t) := u(t) - u^*$, $(a, b) := \nabla F(u^*, u^*)$ y $\varphi(x, y) := R(x + u^*, y + u^*)$ nos queda la ecuación

$$v'(t) = av(t) + bv(t-\tau) + \varphi(v(t), v(t-\tau)),$$

que puede pensarse como una 'perturbación' de una ecuación lineal con coeficientes constantes, en el sentido de que cerca del origen la función φ toma valores muy chicos, más precisamente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varphi(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0.$$

En consecuencia, es esperable que las soluciones que se encuentran cercanas al 0 se comporten de manera similar a las de la ecuación linealizada $v' = av + bv_{-\tau}$.

Veremos que, a grandes rasgos, esto es cierto. Para ello, será conveniente buscar una fórmula general para expresar la solución de una ecuación lineal para cualquier condición inicial dada. Concretamente, lo que necesitamos es una fórmula análoga a la de variación de parámetros para la ecuación lineal no homógenea:

$$u'(t) = au(t) + bu(t-\tau) + f(t) \qquad t > 0 \tag{1}$$

con condición inicial

$$u(t) = \phi(t) \qquad -\tau \le t \le 0. \tag{2}$$

En primer lugar, observemos que si $\phi \in C([-\tau,0])$ y $f \in C([0,+\infty))$, el método de pasos proporciona una solución globalmente definida, es decir, $u \in C([-\tau,+\infty)$: en efecto, si u es solución en $[-\tau, n\tau]$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces por la teoría clásica de ecuaciones ordinarias podemos extender u a la derecha buscando la única solución del problema

$$v'(t) = av(t) + bu(t-\tau) + f(t), \qquad v(n\tau) = u(n\tau)$$

que está definida hasta $(n+1)\tau$. Además, escribiendo para $t > 0$

$$u(t) = \phi(0) + \int_0^t [au(s) + bu(s-\tau) + f(s)]\, ds$$

resulta

$$|u(t)| \leq |\phi(0)| + \int_0^t |f(s)|\, ds + \int_0^t |au(s)|\, ds + \int_{-\tau}^{t-\tau} |bu(s)|\, ds$$

$$\leq |\phi(0)| + \int_0^t |f(s)|\, ds + \int_{-\tau}^0 |b\phi(s)|\, ds + \int_0^t (|a|+|b|)|u(s)|\, ds,$$

pues $\int_{t-\tau}^t |bu(s)|\, ds \geq 0$. Si llamamos

$$R(t) := \int_0^t |f(s)|\, ds + \|\phi\|_\infty (1 + \tau|b|),$$

entonces, para cada t fijo y $\tilde{t} \leq t$ vale $R(\tilde{t}) \leq R(t)$ y

$$|u(\tilde{t})| \leq R(t) + \int_0^{\tilde{t}} (|a|+|b|)|u(s)|\, ds.$$

Por el Lema de Gronwall, se deduce que

$$|u(\tilde{t})| \leq R(t) e^{(|a|+|b|)\tilde{t}}$$

para todo $\tilde{t} \leq t$ y, en definitiva:

$$|u(t)| \leq R(t) e^{(|a|+|b|)t}.$$

Por conveniencia, denotemos $u(t,\phi,f)$ a la solución correspondiente a cada ϕ y cada f; luego, la desigualdad anterior se escribe:

$$|u(t,\phi,f)| \leq \left(\int_0^t |f(s)|\, ds + \|\phi\|_\infty (1+\tau|b|) \right) e^{(|a|+|b|)t}. \tag{3}$$

Observemos, además, que $u(t,\phi,f) = u(t,\phi,0) + u(t,0,f)$, lo que dará lugar a la fórmula de variación de parámetros.

Observación 0.1 *Es interesante observar que, para t fijo, podemos definir las aplicaciones lineales $S : C([-\tau, 0]) \to \mathbb{R}$ y $T : C([0, t]) \to \mathbb{R}$ dadas por*

$$S(\phi) := u(t, \phi, 0), \qquad T(f) := u(t, 0, f)$$

Por la desigualdad anterior se tiene que

$$|S(\phi)| \leq C\|\phi\|_\infty, \qquad |T(f)| \leq D\|f\|_\infty$$

para $C = (1 + \tau|b|)e^{(|a|+|b|)t}$ y $D = te^{(|a|+|b|)t}$, de modo que S y T resultan continuas. Por el teorema de Riesz, existen representaciones integrales de la forma

$$S(\phi) = \int_0^t \phi \, d\lambda, \qquad T(f) = \int_0^t f \, d\mu$$

para ciertas medidas λ y μ.

En lo que sigue, veremos una manera explícita de encontrar una expresión integral para la solución general $u(t, \phi, f)$ con ayuda de una herramienta de gran utilidad: la transformada de Laplace. A tal fin, recordemos (al menos en el sentido del mito platónico) algunas propiedades fundamentales de dicha transformada.

Para $f : [0, +\infty)$ localmente integrable tal que $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$ para ciertas constantes $A, B \geq 0$ se define

$$\mathcal{L}(f)(z) := \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) \, dt.$$

Es claro que $\mathcal{L}f$ se encuentra bien definida y resulta una función analítica en el conjunto $\{\mathrm{Re}(z) > B\}$. Por otra parte, para la convolución de dos funciones f y g, definida como

$$f * g(t) := \int_0^t f(t - s)g(s) \, ds$$

es inmediato verificar que vale

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g).$$

Además, se tiene el teorema de inversión para f como antes, asumiendo que tiene localmente variación acotada:

$$\int_{(C)} \mathcal{L}(f)(z)e^{zt} \, dz = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \qquad t > 0$$

para todo $C > B$, donde

$$\int_{(C)} \varphi(z) \, dz := \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{C-iT}^{C+iT} \varphi(z) \, dz.$$

Lo anterior brinda una expresión explícita para la antitransformada $\mathcal{L}^{-1}$, que por ahora vamos a emplear informalmente.

Supongamos que f tiene crecimiento exponencial, entonces la solución u también (¿por qué?), de modo que podemos transformar ambos miembros de la ecuación (1). Por la linealidad de $\mathcal{L}$, vale

$$\mathcal{L}(u') = a\mathcal{L}(u) + b\mathcal{L}(u_{-\tau}) + \mathcal{L}(f)$$

donde $u_{-\tau}(t) := u(t-\tau)$. Es fácil verificar la siguiente propiedad de la transformada:

$$\mathcal{L}(u')(z) = z\mathcal{L}(u)(z) - u(0).$$

Luego, la igualdad anterior se escribe

$$(z-a)\mathcal{L}(u)(z) = \phi(0) + b\left(\int_0^\tau e^{-zt}\phi_{-\tau}(t)\,dt + \int_\tau^{+\infty} e^{-zt}u_{-\tau}(t)\,dt\right) + \mathcal{L}(f)(z)$$

$$= \phi(0) + b\left(\int_0^\tau e^{-zt}\phi_{-\tau}(t)\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-z(t+\tau)}u(t)\,dt\right) + \mathcal{L}(f)(z)$$

$$= \phi(0) + b\left(\int_0^\tau e^{-zt}\phi_{-\tau}(t)\,dt + e^{-z\tau}\mathcal{L}(u)(z)\right) + \mathcal{L}(f)(z),$$

es decir:

$$\left(z-a-be^{-z\tau}\right)\mathcal{L}(u)(z) = \phi(0) + b\int_0^\tau e^{-zt}\phi_{-\tau}(t)\,dt + \mathcal{L}(f)(z).$$

No es casualidad que el factor del término de la izquierda sea exactamente la función característica $h(z) = z - a - be^{-z\tau}$; por otra parte, si extendemos ϕ a la derecha de 0 en forma nula, la igualdad anterior se puede escribir

$$\mathcal{L}(u)(z) = \frac{1}{h(z)}\left(\phi(0) + \mathcal{L}(b\phi_{-\tau} + f)(z)\right).$$

Luego, si logramos calcular la antitransformada de $\frac{1}{h}$, es decir, una función K tal que $\mathcal{L}(K) = \frac{1}{h}$, resultará

$$\mathcal{L}(u) = \phi(0)\mathcal{L}(K) + \mathcal{L}(K)\mathcal{L}(b\phi_{-\tau} + f) = \mathcal{L}(\phi(0)K) + \mathcal{L}(K * (b\phi_{-\tau} + f)),$$

es decir:

$$u = \phi(0)K + K * (b\phi_{-\tau} + f).$$

La función K se llama *solución fundamental* de la ecuación; si pensamos como antes $u(t,\phi,f) = u(t,\phi,0) + u(t,0,f)$ obtenemos la descomposición

$$u(t) = \phi(0)K(t) + bK * \phi_{-\tau}(t) + K * f(t),$$

donde el último término es una solución particular (para $\phi = 0$) y los dos primeros describen la totalidad de las soluciones de la ecuación homogénea (con $f = 0$).

A fin de calcular K, veamos primero qué ecuación debe cumplir. Por empezar, observemos que a partir de la igualdad

$$u(t,\phi,0)=\phi(0)K(t)+bK*\phi_{-\tau}(t),$$

si tomamos por ejemplo

$$\phi_n(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } -1\le t\le -\frac{1}{n} \\ nt+1 & \text{si } -\frac{1}{n}<t\le 0 \end{cases}$$

es "razonable" pensar que $u(t,\phi_n,0)\to K(t)$ para $n\to\infty$ y en consecuencia K tiene que ser una "solución" del problema homogéneo con condición inicial (discontinua)

$$\phi(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1 & \text{si } t=0. \end{cases}$$

Para sustentar un poco más esta intuición, cabe observar que si consideramos ahora

$$u(t):=u(t,0,f)=K*f(t)=\int_0^t K(t-s)f(s)\,ds$$

y derivamos para $t>0$ obtenemos

$$au(t)+bu(t-\tau)+f(t)=K(0)f(t)+\int_0^t K'(t-s)f(s)\,ds. \tag{4}$$

Pero

$$u(t-\tau)=K*f(t-\tau)=\int_0^{t-\tau}K(t-\tau-s)f(s)\,ds$$

y asumiendo que $K(s)=0$ para $s<0$ resulta

$$\int_0^{t-\tau}K(t-\tau-s)f(s)\,ds=\int_0^t K_{-\tau}(t-s)f(s)\,ds=K_{-\tau}*f(t).$$

En consecuencia, a partir de (4) y asumiendo $K(0)=1$ se deduce

$$(aK+bK_{-\tau})*f=K'*f,$$

para toda f, de donde $K'=aK+bK_{-\tau}$.

A pesar de que ϕ es discontinua, el método de pasos permite obtener K como función definida en $[-\tau,+\infty)$ con $K(t)=0$ para $t<0$. Más aun, la fórmula (3) antes obtenida muestra que K tiene crecimiento exponencial, más precisamente

$$|K(t)|\le(1+\tau b)e^{(|a|+|b|)t} \tag{5}$$

y en consecuencia $\mathcal{L}(K)$ está bien definida.[1]

[1] Esto también puede verse en forma directa, pues $K(t)=e^{at}$ para $t\in[0,\tau]$, luego en $[\tau,2\tau]$ vale

$$K'(t)=aK(t)+be^{a(t-\tau)},\qquad K(\tau)=e^{a\tau}$$

y se deduce que $K(t)=(1+tbe^{-a\tau})e^{at}$, etc.

Observemos que efectivamente $\mathcal{L}(K) = \frac{1}{h}$, pues a partir de la ecuación

$$K'(t) = aK(t) + bK(t-\tau) \qquad t > 0$$

podemos transformar de ambos lados para obtener, como antes:

$$z\mathcal{L}(K)(z) - K(0) = a\mathcal{L}(K)(z) + be^{-z\tau}\mathcal{L}(K)(z)$$

pues $K \equiv 0$ en $[-1, 0)$. Esto dice que

$$(z - a - be^{-z\tau})\mathcal{L}(K) = K(0) = 1$$

y en consecuencia $\mathcal{L}(K) = \frac{1}{h}$.

La fórmula obtenida permite demostrar el resultado que quedó pendiente de la clase anterior, que asegura estabilidad asintótica del equilibrio para la ecuación homogénea cuando todas las raíces características tienen parte real negativa. Más en general, se tiene:

Teorema 0.1 *Sea* $\mu > \mu_0 := \sup\{\mathrm{Re}(\lambda) : h(\lambda) = 0\}$. [2] *Entonces existe* $\rho = \rho(a, b)$ *tal que*

$$|u(t, \phi, 0)| \leq \rho\|\phi\|_\infty e^{\mu t}$$

para todo $t > 0$.

Demostración: De acuerdo con la fórmula de inversión y por (5), sabemos que para $C > |a| + |b|$ y $t > 0$ vale

$$K(t) = \int_{(C)} \mathcal{L}(K)(z)e^{zt}\,dz = \int_{(C)} \frac{e^{zt}}{h(z)}\,dz.$$

Veamos en primer lugar que también vale

$$K(t) = \int_{(\mu)} \frac{e^{zt}}{h(z)}\,dz.$$

En efecto, si $\mu \geq C$ no hay nada que probar, mientras que si $\mu < C$ podemos considerar el rectángulo R con vértices en los puntos $\mu \pm iT$, $C \pm iT$. Como h no se anula en R, vale

$$\int_{\partial R} \frac{e^{zt}}{h(z)}\,dz = 0,$$

de modo que alcanza con probar que

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{\gamma^\pm} \frac{e^{zt}}{h(z)}\,dz = 0$$

donde $\gamma^\pm(s) := s \pm iT$ para $\mu \leq s \leq C$. Notemos que para $z = s \pm iT$ vale

$$|h(z)| \geq |\mathrm{Im}(h(z))| = |T - be^{-s\tau}\mathrm{sen}(T\tau)| > \frac{T}{2}$$

[2] Que en realidad es un máximo.

para T mayor que un cierto T_0, mientras que

$$|e^{zt}| = e^{ts} \leq e^{Ct}$$

y, de esta forma,

$$\left| \int_{\gamma^\pm} \frac{e^{zt}}{h(z)}\, dz \right| \leq \frac{2}{T} e^{Ct}(C - \mu) \to 0.$$

Además, para

$$f(z) := \frac{1}{h(z)} - \frac{1}{z - \mu_0} = \frac{a + be^{-z\tau} - \mu_0}{h(z)(z - \mu_0)}$$

se cumple, si $T > T_0$:

$$|f(\mu \pm iT)| \leq \frac{2}{T^2} \left| a - \mu_0 + be^{-\mu\tau}\cos(T\tau) \mp ibe^{-\mu\tau}\mathrm{sen}(T\tau) \right| \leq \frac{D}{T^2}$$

para cierta constante D. Esto implica

$$\left| \int_{\mu - iT}^{\mu + iT} f(z)\, dz \right| \leq \left| \int_{\mu - iT_0}^{\mu + iT_0} f(z)\, dz \right| + \frac{2(T - T_0)D}{T^2} \leq M$$

para cierta constante M y luego

$$\left| \int_{\mu - iT}^{\mu + iT} f(z) e^{zt}\, dz \right| \leq M e^{\mu t}.$$

Notemos, finalmente, que la función $\frac{1}{z - \mu_0}$ es la transformada de $g(t) := e^{\mu_0 t}$, de modo que

$$\int_{(\mu)} \frac{e^{zt}}{z - \mu_0}\, dz = e^{\mu_0 t} < e^{\mu t}.$$

Se deduce entonces que

$$|K(t)| = \left| \int_{(\mu)} \frac{e^{zt}}{h(z)}\, dz \right| \leq k e^{\mu t}$$

para cierta constante k. En consecuencia, escribiendo

$$u(t, \phi, 0) = \phi(0) K(t) + b \int_0^\tau K(t - s) \phi(s - \tau)\, ds$$

obtenemos

$$\begin{aligned} |u(t, \phi, 0)| &\leq |\phi(0)| k e^{\mu t} + |b| \|\phi\|_\infty k \int_0^\tau e^{\mu(t-s)}\, ds \\ &\leq k \left(1 + |b| \frac{e^{-\mu\tau} - 1}{\mu} \right) \|\phi\|_\infty e^{\mu t}. \end{aligned}$$

$\square$