Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 3, versión preliminar (las críticas son bienvenidas)

En la clase previa comenzamos el estudio de la ecuación lineal con feedback

$$u'(t) = -\alpha u(t - \tau) \tag{1}$$

para un retardo fijo $\tau > 0$. Como vimos, todas las soluciones de (1) son oscilatorias si y solo si $\alpha\tau > \frac{1}{e}$. Para ello, analizamos los ceros reales de la función característica $h(\lambda) = \lambda + \alpha e^{-\lambda\tau}$. En lo que sigue, obtendremos información sobre la estabilidad del equilibrio $u \equiv 0$ a partir de un análisis más profundo de las raíces de h. Por conveniencia, introducimos el cambio de variables

$$s := \frac{t}{\tau}, \qquad \beta := \alpha\tau, \qquad U(s) := u(t),$$

de modo que la ecuación para U resulta

$$U'(s) = -\beta U(s - 1),$$

y la función característica es

$$h(\lambda) = \lambda + \beta e^{-\lambda}.$$

Como vimos, para cualquier $a \in \mathbb{R}$ h tiene finitos ceros en el conjunto

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \geq a\};$$

además, λ es raíz si y solo si $\overline{\lambda}$ es raíz. Escribiendo $\lambda = x + iy$, las raíces se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = -\beta e^{-x} \cos y \\ y = \beta e^{-x} \operatorname{sen} y. \end{cases} \tag{2}$$

El siguiente resultado caracteriza los valores de β para los cuales existen raíces con parte real negativa. Como vimos, si $\beta < 0$ hay siempre una raíz real positiva, de modo que nos limitaremos a considerar ahora el caso $\beta > 0$.

Proposición 0.1 *Se cumple:*

1. *Si* $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$*, entonces existe* $\mu > 0$ *tal que* $\mathrm{Re}(\lambda) \leq -\mu$ *para toda raíz* λ*.*

2. *Si $\beta = \frac{\pi}{2}$, entonces $\lambda = \pm i\frac{\pi}{2}$ son raíces simples y todas las raíces restantes tienen parte real negativa.*

3. *Si $\beta > \frac{\pi}{2}$, entonces existe alguna raíz λ tal que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $\frac{\pi}{2} < Im(\lambda) < \pi$.*

Demostración:

Supongamos que $\lambda = x + iy$ es raíz característica, luego se satisface (2). Podemos suponer, además, que $y \geq 0$. Si $x \geq 0$, entonces (por ser $\beta > 0$) vale $y \neq 0$ y entonces $\cos y \leq 0 < \mathrm{sen} y$. Se deduce que y pertenece al segundo cuadrante, es decir

$$y \in S := \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[2n\pi + \frac{\pi}{2}, (2n+1)\pi\right).$$

Además, vale

$$\frac{\mathrm{sen} y}{y} = \frac{e^x}{\beta},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{sen} y}{y}\right) = \frac{y\cos y - \mathrm{sen} y}{y^2} < 0$$

para todo $y \in S$. Como

$$\frac{\mathrm{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

se deduce que

$$\frac{\mathrm{sen} y}{y} < \frac{2}{\pi}$$

para todo $y \in S \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$. Luego

$$\frac{1}{\beta} \leq \frac{e^x}{\beta} \leq \frac{2}{\pi},$$

de donde $\beta \geq \frac{\pi}{2}$. De aquí se deduce, para $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, que todas las raíces tienen parte real negativa; además, como su cantidad es finita en cualquier conjunto de la forma $\{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) \geq a\}$, existe $\mu > 0$ tal que $\mathrm{Re}(\lambda) \leq -\mu$ para toda raíz λ.

Para $\beta = \frac{\pi}{2}$ los anteriores cálculos implican que $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$; luego, las únicas raíces con parte real no negativa son $\pm i\frac{\pi}{2}$, que son claramente simples.

Veamos ahora que para $\beta > \frac{\pi}{2}$ existe una solución de (2) tal que $x > 0$, $\frac{\pi}{2} < y < \pi$. Dividiendo ambas ecuaciones se obtiene $x = g(y) := -y\frac{\cos y}{\mathrm{sen} y}$. Observemos que $g'(y) > 0$ en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y vale $g(\frac{\pi}{2}) = 0$, $g(\pi^-) = +\infty$; luego, para cada valor de y en dicho intervalo queda determinado en forma única un valor $x = x(y) > 0$ tal que $\lambda = x + iy$ es una raíz correspondiente al valor $\beta = e^x\frac{y}{\mathrm{sen} y}$. Como x es una función creciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, es fácil ver que β también lo es, con $\beta\left(\frac{\pi}{2}^+\right) = \frac{\pi}{2}$, $\beta(\pi^-) = +\infty$. En consecuencia, para cada valor $\beta > \frac{\pi}{2}$ se determina en forma única un valor $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y una raíz característica λ como antes.

$\square$

A modo de corolario, resulta:

Teorema 0.1 *Se cumple:*

1. *Si* $\alpha < 0$ *o si* $\alpha > \frac{\pi}{2\tau}$*, entonces el equilibrio* $u \equiv 0$ *en (1) es inestable.*

2. *Si* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2\tau}$*, entonces el equilibrio* $u \equiv 0$ *en (1) es asintóticamente estable.*

<u>Demostración</u>: En el primer caso, hay una solución real de la forma $u(t) = e^{at}\cos bt$ con $a > 0$ y $b \geq 0$, lo que muestra que 0 es un equilibrio inestable.

En el segundo caso, todas las raíces características tienen parte real menor que una constante $-c < 0$; más adelante veremos que esto implica la estabilidad asintótica del equilibrio $u \equiv 0$. $\square$

Observación 0.1 *La estabilidad asintótica resulta intuitivamente clara si aceptamos como válido el hecho (válido) de que 'a grandes rasgos', las soluciones son de la forma*

$$u(t) = (at + b)e^{-\frac{t}{\tau}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t},$$

en donde el primer término puede ser no nulo únicamente en el caso $\alpha\tau = \frac{1}{e}$*.*

En efecto, para tales soluciones tenemos que

$$|u(t)| \leq |at + b|e^{-\frac{t}{\tau}} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\mathrm{Re}(\lambda_n)t} \leq e^{-\gamma t}\left(|a|t + D\right)$$

donde $D := |b| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *y* $\gamma := \min\{c, \frac{1}{\tau}\}$*, lo que prueba que* $u(t) \to 0$ *para* $t \to +\infty$*.*

El teorema previo dice, en otras palabras, que el valor $\tau^* = \frac{\pi}{2\alpha}$ es un *retardo crítico*: para $\tau < \tau^*$ las soluciones se comportan asintóticamente de manera similar al caso sin retardo, pero el equilibrio $u \equiv 0$ se hace inestable para $\tau > \tau^*$.

Es interesante observar que para $\frac{1}{\alpha e} < \tau < \frac{\pi}{2\alpha}$ las soluciones se mantienen estables pero son oscilatorias. Esto se debe a que en la raíz doble $\lambda = -1$, que existe para $\beta = \frac{1}{e}$, se produce una bifurcación y comienzan a aparecer raíces complejas conjugadas, con parte real todavía negativa mientras $\beta < \frac{\pi}{2}$:

Lema 0.1 *Dado* $\beta \in \left(\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right)$*, existen* $\lambda = x \pm iy$ *raíces tales que* $-1 < x < 0$*,* $0 < y < \frac{\pi}{2}$*.*

<u>Demostración</u>:

Como $\beta > \frac{1}{e}$, sabemos que h no tiene raíces reales, de modo que el sistema (2) equivale a

$$\begin{cases} x = -y\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} \\ \beta e^{-x} = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Como antes, la función $g(y) := -y\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}$ crece estrictamente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y vale $g(0^+) = -1$, $g(\frac{\pi}{2}^-) = 0$. Esto implica que para todo valor $x \in (-1, 0)$ la ecuación $g(y) = x$ tiene exactamente una solución $y := \xi(x)$, con ξ una función positiva y creciente, $\xi(-1^+) = 0$, $\xi(0^-) = \frac{\pi}{2}$. Esto determina de forma única el valor

$$\beta = \beta(x) = e^x \sqrt{x^2 + \xi(x)^2}.$$

Es inmediato verificar que β es creciente, $\beta(-1^+) = \frac{1}{e}$, $\beta(0^-) = \frac{\pi}{2}$; en otras palabras, para cada valor de β en el intervalo $\left(\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right)$ obtenemos de manera única un valor $x \in (-1, 0)$ y un valor $y = \xi(x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\square$

Observación 0.2 *De la demostración anterior se ve que existen dos ramas de raíces $\lambda(\beta) := x(\beta) \pm iy(\beta)$ tales que $\lambda(\frac{1}{e}) = -1$, $\lambda(\frac{\pi}{2}) = \pm i\frac{\pi}{2}$.*

Un poco más en general, consideremos ahora la ecuación lineal con coeficientes constantes

$$u'(t) = au(t) + bu(t - \tau) \tag{3}$$

para $a, b \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$. Como antes, se tiene la ecuación característica $h(\lambda) = 0$, donde

$$h(\lambda) := \lambda - a - be^{-\lambda\tau}.$$

Haciendo el reemplazo

$$z := \tau\lambda, \qquad \alpha := a\tau, \qquad \beta := b\tau,$$

la ecuación característica es equivalente a

$$F(z, \alpha, \beta) := z - \alpha - \beta e^{-z} = 0.$$

Escribiendo $z = x + iy$, tales raíces se caracterizan por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta e^{-x}\cos y \\ y &= -\beta e^{-x}\operatorname{sen} y. \end{aligned} \tag{4}$$

Como antes, podemos limitarnos a considerar $y \geq 0$. En primer lugar, veamos cuáles son las raíces con parte real nula, es decir, $x = 0$. Cuando $y = 0$, se tiene que $z = 0$ es solución si y solo si $\alpha + \beta = 0$. En cambio, para $y > 0$ sabemos que $z = \pm iy$ es raíz si y solo si

$$y = -\beta\operatorname{sen} y, \qquad \alpha = -\beta\cos y.$$

Esto dice que y no puede ser un múltiplo de π; más aun, para cada $y \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{N}_0$ queda determinado un único par (α, β) dado por

$$\alpha = \frac{y\cos y}{\operatorname{sen} y}, \qquad \beta = \frac{-y}{\operatorname{sen} y}.$$

Esto permite definir curvas suaves en el plano (α, β), dadas por

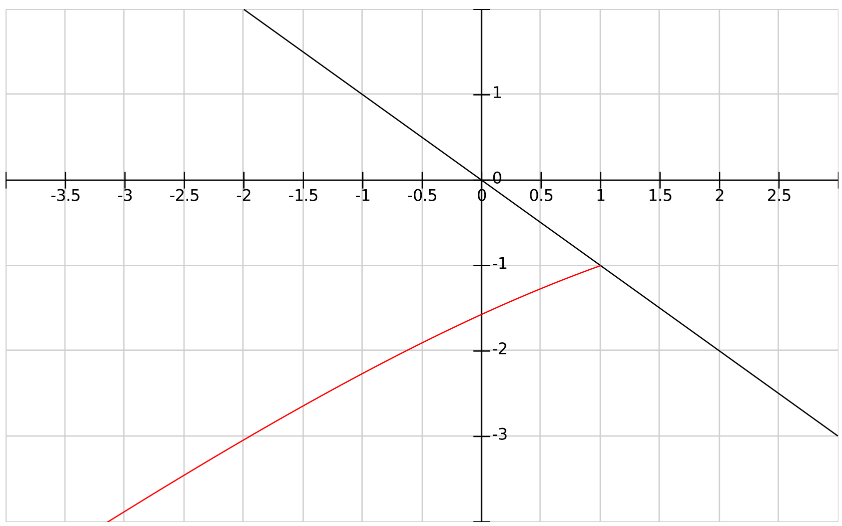
$$C_k := \{(\alpha(y), \beta(y)) : y \in (k\pi, (k+1)\pi)\}.$$

Estas curvas son todas disjuntas y sin autointersecciones, pues si $(\alpha(y), \beta(y)) = (\alpha(\tilde{y}), \beta(\tilde{y}))$ para ciertos $y, \tilde{y} > 0$, se deduce que $\cos y = \cos\tilde{y}$. Esto da lugar a dos posibilidades:

- $y = \tilde{y} + 2n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, en cuyo caso sen$y$ = sen$\tilde{y}$, de donde $n = 0$, es decir: $y = \tilde{y}$.

- $y = -\tilde{y} + 2n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. En este caso sen$y = -$sen$\tilde{y}$, de modo que $y = -\tilde{y}$ (absurdo).

Notemos, además, que C_0 se puede extender en forma continua para $y = 0$, de modo que se encuentra con la recta $\alpha + \beta = 0$ en el punto $(1, -1)$. Por otra parte, para $0 < y < \pi$ se cumple que $\alpha'(y), \beta'(y) < 0$, de modo que α y β decrecen y tienden a $-\infty$ a medida que $y \to \pi^-$. Además, la curva se mete en el primer cuadrante por el punto $(0, -\frac{\pi}{2})$ y se acerca asintóticamente a la recta $\alpha = \beta$ (siempre por debajo de ella), ya que $\alpha(y) - \beta(y) = \frac{y}{\text{sen}y}(1 + \cos y)$ es mayor que 0 en $(0, \pi)$ y tiende a 0 para $y \to \pi^-$. Llamemos R a la región no acotada que queda debajo de recta $\alpha + \beta = 0$ y arriba de C_0, es decir, esa especie de 'triángulo infinito' que queda a la izquierda en la siguiente figura.



Es fácil ver que las restantes curvas C_k con $k > 0$ no tocan la región R: por ejemplo, basta con un argumento de continuidad, pues resulta claro que no se cortan con ∂R y, además, poniendo $y = \frac{2k+1}{2}\pi$ se obtiene el valor

$$(\alpha, \beta) = \left(0, (-1)^{k+1}\frac{2k+1}{2}\pi\right) \in C_k \setminus \overline{R}.^1$$

Para cada $(\alpha, \beta) \in R$ fijo, consideremos el número $N \in \mathbb{N}_0$ dado por

$$N(\alpha, \beta) = \#\{z \in \mathbb{C} \text{ raíz característica} : \text{Re}(z) > 0\}$$

[1] Más precisamente, se ve que C_k queda contenida arriba del eje α y a la derecha de la recta $\alpha + \beta = 0$ para k impar, y en el 'triángulo infinito' inferior para k par.

en donde las raíces se cuentan con su multiplicidad. Veamos que N es localmente constante (y, en consecuencia, constante) sobre R. En efecto, consideremos $(\alpha, \beta) \in R$ y una bola $B \subset R$ de radio r centrada en (α, β). Si $z = x + iy$ es una raíz correspondiente a algún $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in B$ con $x \geq 0$, entonces $x > 0$ y empleando (4) se deduce:

$$0 < x < |\tilde{\alpha}| + |\tilde{\beta}| < |\alpha| + |\beta| + 2r, \qquad |y| < |\tilde{\beta}| < |\beta| + r,$$

Luego, si Γ es el rectángulo

$$\Gamma := \{x + iy : 0 < x < |\alpha| + |\beta| + 2r,\ |y| < |\beta| + r\},$$

se deduce que, para cualquier elemento de B, todas las posibles raíces características con parte real positiva caen en Γ y, por otra parte, $\overline{\Gamma}$ no contiene otras raíces características. En particular, vale

$$\theta := \min_{z \in \partial\Gamma} |F(z, \alpha, \beta)| > 0.$$

Achicando ahora el radio de B tanto como haga falta y usando la continuidad uniforme de F en $\partial\Gamma \times B$, podemos suponer que

$$|F(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) - F(z, \alpha, \beta)| < \theta$$

para todo $(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \partial\Gamma \times B$. Para simplificar un poco la vida (en este momento nada sencilla) del lector, llamemos

$$f(z) := F(z, \alpha, \beta), \qquad \tilde{f}(z) := F(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}).$$

Como θ es el mínimo, la desigualdad anterior implica que

$$|\tilde{f}(z) - f(z)| < |f(z)| \qquad \text{para todo } z \in \partial\Gamma.$$

Luego, por el teorema de Rouché (¡quién lo hubiera dicho!), se deduce que f y $\tilde{f}$ tienen, en Γ, la misma cantidad de raíces. En otras palabras, todos los elementos de B tienen la misma cantidad de raíces con parte real positiva. Finalmente, observemos que $(-1, 0) \in R$ y $F(z, -1, 0) = z + 1$, de modo que la única raíz es $z = -1$. Concluimos entonces que $N \equiv 0$ sobre R, es decir: para $(\alpha, \beta) \in R$ todas las raíces características tienen parte real negativa.

La misma idea previa sirve para mostrar que, en realidad, el valor $N(\alpha, \beta)$ es constante sobre las componentes conexas del complemento, en el plano (α, β), del conjunto

$$\{\alpha + \beta = 0\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k.$$

Esto permite probar que si $(\alpha, \beta) \notin \overline{R}$ entonces hay alguna raíz característica con parte real positiva. En efecto (ver Práctica $1 - \tau$), es fácil ver que hay una raíz real positiva cuando $\alpha + \beta > 0$ y $\beta \geq 0$. Como la región $\{\alpha + \beta > 0 \geq \beta\}$ no se interseca con las curvas C_k, se deduce que si $\alpha + \beta > 0$ entonces hay al menos una raíz con parte real positiva. Por otra parte, para la región contenida bajo C_0 y la recta $\alpha + \beta = 0$ existe una raíz real negativa en cada una de las componentes conexas contenidas allí: basta ver que hay una raíz real positiva cuando $-e^{\alpha-1} < \beta \leq -1$ y observar que todas las curvas C_k con k par cruzan el gráfico de la función $\beta = -e^{\alpha-1}$. Finalmente, empleando el teorema de la función implícita se puede probar que entre las curvas C_{2n} y C_{2n+2} el número de raíces con parte real positiva es exactamente $2n + 2$ y, entonces, sobre las curvas C_k con $k > 0$ par también debe existir una raíz con parte real positiva (para más detalles, ver [1]).

Esto permite obtener conclusiones respecto de la estabilidad en el origen. Observemos que si $a+b = 0$ se tiene que $\lambda = 0$ es raíz característica y cualquier constante es un punto de equilibrio, de modo que supondremos $a+b \neq 0$. En tal caso, sabemos que hay inestabilidad cuando $(\alpha, \beta) \notin \overline{R}$. Esto ocurre siempre en caso de que $\alpha+\beta > 0$, es decir, $a+b > 0$; en cambio la región que queda debajo de la recta $\alpha + \beta = 0$ y encima de (o sobre) la recta $\alpha = \beta$ está contenida en R y para esos valores hay estabilidad asintótica. Esto corresponde a la situación en que $a+b < 0$ y $b \geq a$. Finalmente, cuando $a+b < 0$ y $b < a$, sigue habiendo estabilidad asintótica mientras (α, β) se mantenga por encima de C_0. Como $(\alpha, \beta) = \tau(a, b)$ y además $0 \in \overline{R}$, se ve que $(\alpha, \beta) \in R$ para valores pequeños de τ, y $(\alpha, \beta) \notin \overline{R}$ cuando τ es grande. Observemos que para $0 < y < \pi$ vale $\alpha'(y) < \beta'(y)$, lo que dice que la semirrecta $\{\tau(a, b) : \tau > 0\}$ no puede cortar la curva C_0 más de una vez: en consecuencia, existe un único valor τ^* para el cual $(\alpha, \beta) \in C_0$ y, al igual que en el modelo con feedback negativo antes analizado (que corresponde al caso $a = 0$, $b < 0$), se deduce que $u \equiv 0$ es asintóticamente estable para $0 < \tau < \tau^*$ e inestable para $\tau > \tau^*$. Se verifica fácilmente que τ^* se hace más grande a medida que a se acerca a b. Resumiendo,

Teorema 0.2 *Para la ecuacion (3), se cumple:*

1. *Si $a + b > 0$, el equilibrio $u \equiv 0$ es intestable.*
2. *Si $a + b < 0$ y $b \geq a$, el equilibrio $u \equiv 0$ es asintóticamente estable.*
3. *Si $a + b < 0$ y $b < a$, existe un valor $\tau^* > 0$ tal que el equilibrio $u \equiv 0$ es asintóticamente estable para $\tau < \tau^*$ e inestable para $\tau > \tau^*$.*

References

[1] H. Smith, An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences, Springer-Verlag, New York, 2011.