Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 17, versión preliminar. Super y subcríticas bienvenidas

Como vimos, el teorema de Hopf permite asegurar la existencia de soluciones periódicas no constantes del sistema $X'(t) = F(X_t, \mu)$ para μ cercano a 0 bajo la hipótesis de que existe una raíz característica simple $\lambda_0 = i\nu_0$ de la linealización para $\mu = 0$, que escribimos $X'(0) = L(0)X_t$. Más precisamente, se asume que además ninguna otra raíz característica (dejando de lado, obviamente, al conjugado de λ_0) es múltiplo de λ_0. Además, escribiendo las raíces características del sistema linealizado para μ cercano a 0 en forma de una curva $\lambda(\mu)$, se asume que $\mathrm{Re}(\lambda'(0)) > 0$. Según dijimos, la idea consiste en buscar soluciones T_0-periódicas de la ecuación

$$\mathcal{L}Y = N_{\mu,\eta}Y,$$

con $\mathcal{L}Y := Y'(t) - L(0)Y_t$ y $N_{\mu,\eta}Y(t) := \eta F(Y_{t,\eta}, \mu) - L(0)Y_t$, para $\mu \approx 0$ y $\eta \approx 1$. Pero al mirar la 'letra chica' del teorema, vemos que en realidad la perturbación se escribe en términos de un parámetro ε: de esta forma, tanto μ como el período $T = \eta T_0$ de las soluciones obtenidas son funciones de ε. Esto da la pista justamente de cómo se bifurca una rama de soluciones a partir de un elemento del núcleo de $\mathcal{L}$, que es el q_0 del teorema. Concretamente, Herr Hopf nos asegura que existe un intervalo $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ y funciones $\mu(\varepsilon)$ y $T(\varepsilon) = \eta(\varepsilon)T_0 > 0$ para $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ con $\mu(0) = 0$, $T(0) = T_0 := \frac{2\pi}{\nu_0}$ tales que el problema tiene soluciones $T(\varepsilon)$-periódicas no constantes de la forma $p_\varepsilon = \varepsilon q_\varepsilon$, con q_0 una solución T_0-periódica del problema lineal $X' = L(0)X_t$. Como dijimos, estas soluciones son localmente únicas salvo cambios de fase. Además, μ y T son funciones pares, lo que queda evidenciado en los desarrollos

$$\mu(\varepsilon) = \mu_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$
$$\eta(\varepsilon) = 1 + \eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

La demostración rigurosa se puede mirar en el libro de Hale (en caso de dificultad, siempre queda el recurso extremo de invocar aquel célebre precepto: *se mira y no se toca*).

A modo de ejemplo, consideremos la ecuación

$$x'(t) = -\alpha x(t-1)(x(t)+1) \tag{1}$$

para la cual, si bien es más simple que la ecuación un tanto sospechosa que vimos en la clase anterior, la existencia de soluciones periódicas no constantes no es tan fácil de probar (el lector interesado puede verlo -y tocarlo- en el libro de Hale). La linealización es, otra vez, una ecuación que ya conocemos bien:

$$x'(t) = -\alpha x(t-1),$$

que tiene raíces características simples $\pm\frac{\pi}{2}i$ para $\alpha = \frac{\pi}{2}$, mientras que las restantes raíces características tienen parte real negativa (ver clase 3). Para ubicarnos en el contexto del teorema, llamemos $\mu = \alpha - \frac{\pi}{2}$ y entonces

$$h(\lambda, \mu) = \lambda + \left(\mu + \frac{\pi}{2}\right) e^{-\lambda}.$$

Derivando en forma implícita en $\mu = 0$ la igualdad $h = 0$ se obtiene

$$\lambda'(0) + e^{-\lambda(0)} - \frac{\pi}{2}\lambda'(0)e^{-\lambda(0)} = 0$$

y, teniendo en cuenta que $\lambda(0) = \frac{\pi}{2}i$, resulta

$$\lambda'(0) = \frac{i}{1+\frac{\pi}{2}i} = \frac{\frac{\pi}{2} - i}{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

En consecuencia, $\mathrm{Re}(\lambda'(0)) > 0$, así que todas las hipótesis del teorema de Hopf se satisfacen... ¡Victoria, saraca victoria! Pero al cabo de tanta satisfacción, no está mal preguntarse: ¿de qué tipo de bifurcación se trata? El teorema nos dice que para ε chico existen $\mu(\varepsilon)$ y soluciones $T(\varepsilon)$-periódicas no constantes con $T(\varepsilon)$ cercano a 4 y $\mu(\varepsilon) \approx \mu_1\varepsilon^2$. Nuestra satisfacción llegaría a niveles nunca antes alcanzados si pudiéramos conocer al menos el signo de μ_1, para poder decir si las soluciones obtenidas son estables (o se hacen).

Veamos, en primer lugar, quién podría jugar el papel de q_0. Observemos que el núcleo del operador $\mathcal{L}x(t) := x'(t) + \frac{\pi}{2}x(t-1)$ en el espacio de funciones 4$-$periódicas C_4 es el generado por $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ y $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, es decir, elementos de la forma $\rho\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \omega\right)$. Pero como buscamos después soluciones de la pinta $\varepsilon q_\varepsilon$, el ρ se lo podemos enchufar al ε y, mediante un elegante cambio de fase, podemos suponer que $\omega = 0$. En otras palabras, nuestro punto de partida va a ser, lisa y llanamente, $q_0(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Y, como dijimos, la manera de transformar soluciones de período "casi" igual a 4 en soluciones 4-periódicas consiste en definir $y(t) := x(\eta t)$, de modo que la ecuación se transforma en

$$y'(t) = \eta x'(\eta t) = -\eta\alpha x(\eta t - 1)(x(\eta t) + 1) = -\eta\alpha y\left(t - 1/\eta\right)\left(y(t) + 1\right).$$

Un ejercicio posible consiste en escribir desarrollos apropiados para $y(t)$, μ y η para intentar deducir el signo de μ_1. Sin embargo, el método más eficiente es el de esperar un poco, pues el resultado se deduce de manera directa del ejemplo más general que veremos a continuación: la ecuación con feedback negativo

$$x'(t) = -f(x(t-\tau))$$

con f suave tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Uno tiene aquí el derecho de preguntarse de qué extraña manera esta ecuación es más general que la anterior...

pero no perdamos la calma y notemos, en primer lugar, que si consideramos $u(t) := x(\tau t)$ entonces el último problema se transforma en otro con retardo igual a 1:

$$u'(t) = \tau x'(\tau t) = -\tau f(x(\tau t - \tau)) = -\tau f(u(t-1)). \tag{2}$$

Por otra parte, es fácil verificar que si x es una solución de (1) tal que $x(0) > -1$, entonces $x(t) > -1$ para todo $t > 0$. Como lo que nos interesa es la dinámica cerca del origen, podemos entonces escribir $u(t) = \ln(x(t) + 1)$ y la ecuación resultante es

$$u'(t) = -\alpha x(t-1) = -\alpha \left(e^{u(t-1)} - 1 \right),$$

que tiene la misma forma que (2) con $\alpha = \tau$ y $f(y) = e^y - 1$. Notar que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$: al menos en este caso, podemos afirmar que no se nos escapa ningún detalle. Como $f(y) = y + R(y)$, la linealización de (2) es $x'(t) = -\tau x(t-1)$ así que, como vimos, para $\mu = \tau - \frac{\pi}{2}$ se cumplen las hipótesis del teorema de Hopf.

Al igual que antes, podemos suponer que nuestra rama de soluciones $\varepsilon q_\varepsilon(t)$ arranca a partir de $q_0(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Y, como estamos pensando que nuestro problema es una perturbación del problema $\mathcal{L}u = 0$, va a ser importante saber cuál es la imagen de $\mathcal{L}$. Por supuesto, la respuesta sería inmediata si $\mathcal{L}$ fuera simétrico respecto del producto de L^2, pero eso no ocurre; sin embargo, se puede observar que aquí el operador adjunto es muy fácil de calcular, pues si u y v son 4-periódicas entonces

$$\int_0^4 \mathcal{L}u(t)v(t)\,dt = \int_0^4 [u'(t) + \frac{\pi}{2}u(t-1)]v(t)\,dt = \int_0^4 u(t)\left[-v'(t) + \frac{\pi}{2}v(t+1)\right] dt.$$

Algún purista podría pensar que en un curso sobre ecuaciones con retardo no debería aparecer una ecuación 'avanzada' de la forma $v'(t) = \frac{\pi}{2}v(t+1)$ para calcular el núcleo del operador adjunto $\mathcal{L}^*$; sin embargo, se comprueba que $\ker(\mathcal{L}^*) = \ker(\mathcal{L})$ y de allí se puede concluir (aclarando antes algunos 'detallecitos') que la imagen de $\mathcal{L}$ está dada por aquellas funciones periódicas que son ortogonales a $\{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\}$, es decir:

$$Im(\mathcal{L}) = \left\{ y \in C_4 : \int_0^4 y(t)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\,dt = \int_0^4 y(t)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\,dt = 0 \right\}.$$

Por supuesto, es posible hacer también la cuenta de manera directa empleando por ejemplo el desarrollo de Fourier. Por comodidad, podemos emplear la base compleja $\{e_n := e^{in\frac{\pi}{2}t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y escribir $x = \sum x_n e_n$ para transformar la ecuación $x'(t) + \frac{\pi}{2}x(t-1) = \varphi(t)$ en

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(in + (-i)^n)e_n = \varphi = \sum \varphi_n e_n.$$

Como $in + (-i)^n$ se anula si y solo si $n = \pm 1$, se deduce que la condición necesaria y suficiente para que haya solución es que $\varphi_{\pm}1 = 0$. En otras palabras (como ya sabíamos), φ debe ser ortogonal a $\cos(\frac{\pi}{2}t)$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t)$ y la solución se calcula entonces despejando los coeficientes de x:

$$x_n = \frac{2}{\pi}\frac{\varphi_n}{in + (-i)^n}. \tag{3}$$

Pasemos ahora a las cuentas. Escribiendo como antes $y(t) = x(\eta t)$, la ecuación se convierte en

$$y'(t) = -\eta\tau f\left(y(t - 1/\eta)\right). \tag{4}$$

La solución que buscamos es de la forma

$$y(t) = \varepsilon q_0(t) + \varepsilon^2 y_1(t) + \varepsilon^3 y_2(t) + \ldots$$

con $q_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ y las funciones y_j ortogonales a $\cos(\frac{\pi}{2}t)$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t)$. Además,

$$\tau = \frac{\pi}{2} + \mu_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

$$\eta = 1 + \eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

Observemos que

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{1 - [-\eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)]} = \sum_{k\geq 0}[-\eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)]^k = 1 - \eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

de modo que

$$y\left(t - \frac{1}{\eta}\right) = y(t-1) + y'(t-1)\eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

Vamos a reemplazar ahora todo en la ecuación (4). Lo que queda no es muy alentador, pero hay que tener paciencia:

$$\varepsilon q_0'(t) + \varepsilon^2 y_1'(t) + \varepsilon^3 y_2'(t) + O(\varepsilon^4) = -\eta\tau f(y(t - 1/\eta)$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} + (\eta_1 + \mu_1)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)\right) f(y(t-1) + y'(t-1)\eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4))$$

Si ahora desarrollamos en serie de Taylor $f(y) = y + \frac{f''(0)}{2}y^2 + \frac{f'''(0)}{6}y^3 + \ldots$ e igualamos los términos correspondientes a ε^j para $j \leq 3$, resulta:

$$q_0'(t) = -\frac{\pi}{2}q_0(t-1).$$

¡Vaya novedad! Esto ya lo sabíamos, pues $q_0(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Pasemos al término siguiente:

$$y_1'(t) = -\frac{\pi}{2}\left[y_1(t-1) + \frac{f''(0)}{2}q_0^2(t-1)\right]$$

es decir

$$y_1'(t) = -\frac{\pi}{2}\left[y_1(t-1) + \frac{f''(0)}{2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]$$

Como y_1 es ortogonal a $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, empleando la fórmula (3) se obtiene (de manera única) y_1. Finalmente, queda la ecuación para y_2, que es todavía un poco más fea:

$$y_2'(t) = -\frac{\pi}{2}\left[y_2(t-1) + \eta_1 q_0'(t-1) + \frac{f'''(0)}{6}q_0^3(t-1)\right] + (\eta_1 + \mu_1)q_0(t-1).$$

Más y más cuentas (que pasaremos disimuladamente por alto) llevan por fin a una conclusión que, convengamos, no es fácil adivinar de antemano:

$$sgn(\mu_1) = sgn\left[f''(0)^2(11\pi - 4) - 5\pi f'''(0)\right].$$

En otras palabras, la bifurcación es supercrítica si $f''(0)^2$ es 'grande' en comparación con $f'''(0)$ y subcrítica en caso contrario.