Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 16, versión poco cocida. Críticas bienvenidas

En la clase previa vimos una manera de resolver, empleando el teorema de la función implícita, algunos problemas resonantes que se pueden pensar como perturbaciones de algún problema cuyas soluciones conocemos. Sin embargo, el caso analizado, de resonancia en el autovalor nulo, no se aplica a nuestros propósitos de entender el teorema de Hopf. Conviene entonces repasar el método, pero ahora en un contexto más general. Por simplicidad, mantendremos por ahora la forma del problema anterior

$$LX = \varepsilon N_\varepsilon X,$$

aunque el planteo puede generalizarse todavía más. Ahora $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es un operador lineal de Fredholm, en el sentido de que los espacios de partida y llegada (para nuestras aplicaciones, C_T en ambos casos) pueden escribirse respectivamente como sumas directas

$$\mathcal{V} = \ker(L) \oplus E, \qquad \mathcal{W} = \mathrm{Im}(L) \oplus F$$

con $\dim(\ker(L)) = \dim(F) < \infty$. Denotemos $K : \mathrm{Im}(L) \to E$ el inverso a derecha de L y fijemos proyectores $P : X \to \ker(L)$, $Q : Y \to F$ y un isomorfismo $J : F \to \ker(L)$. Para $\varepsilon \neq 0$, la ecuación $LX = \varepsilon N_\varepsilon X$ equivale, como en el caso anterior, a dos igualdades:

1. $X - PX = \varepsilon K(N_\varepsilon X - QN_\varepsilon X)$,

y la ecuación de bifurcación

2. $QN_\varepsilon X = 0$.

Observemos que se trata de ecuaciones en espacios diferentes, así que para reunirlas en una sola de la forma $\mathcal{F}(X, \varepsilon) = 0$ como hicimos en la clase previa, necesitamos hacer uso del isomorfismo J y definir

$$\mathcal{F}(X, \varepsilon) := X - PX - JQN_\varepsilon X - \varepsilon K(N_\varepsilon X - QN_\varepsilon X).$$

Se ve entonces que $\mathcal{F}(X, 0) = 0$ si y solo si $X \in \ker(L)$ y $JQN_0X = 0$, de modo que podemos definir la función $\varphi : \ker(L) :\to \ker(L)$ dada por $\varphi(X) := JQN_0X$. Entonces, se puede asegurar la existencia de soluciones para ε chico si existe $X_0 \in \ker(L)$ tal que

- $\varphi(X_0) = 0$.
- $D\varphi(X_0)$ inversible.

Esto se ve exactamente igual que en el ejemplo anterior, ya que vale

$$D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(\psi) = \psi - P(\psi) - JQ(DN_0X_0(\psi))$$

y luego

$$D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(\psi) = \xi \Longleftrightarrow \xi = \psi - w$$

con $w = P\psi + JQ(DN_0X_0(\psi)) \in \ker(L)$. Luego, la igualdad anterior equivale a

$$D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(w) = \xi - D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(\xi).$$

Pero tanto X_0 como el w que buscamos está en $\ker(L)$, vale

$$D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(w) = \lim_{h\to 0} \frac{JQ(N_0(X_0 + hw)) - JQ(N_0(X_0))}{h} = D\varphi(X_0)(w),$$

de modo que existe un único w que satisface lo pedido. Luego $D_X\mathcal{F}(X_0, 0)$ es biyectiva y, por el teorema de la aplicación abierta, se deduce que es un isomorfismo.

A modo de ejemplo, consideremos la ecuación

$$u''(t) + u(t) = \varepsilon g(u(t), u(t - \tau)) := \varepsilon Nu(t),$$

con $N : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$. En este caso $Lu := u'' + u$, cuyo núcleo en $C_{2\pi}$ es el subespacio generado por $\{\cos t, \operatorname{sen} t\}$, mientras que $\operatorname{Im}(L)$ es el complemento ortogonal de $\ker(L)$ respecto del producto interno de $L^2(0, 2\pi)$ (esto sale haciendo la cuenta, o más directamente empleando la simetría de L). Para $X(t) = a\cos t + b \operatorname{sen} t$, calculamos $\varphi(X) = QN(u) = \alpha \cos t + \beta \operatorname{sen} t$, donde α y β son los coeficientes de Fourier

$$\alpha := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(X(t), X(t - \tau)) \cos t \, dt,$$

$$\beta := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(X(t), X(t - \tau))\operatorname{sen} t \, dt.$$

Para aquellos que pensaban que la expresión 'ignorar los isomorfismos' no era más que una forma de hablar, presentamos aquí un ejemplo bien tangible de tal ignorancia, pensando directamente $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como $\varphi(a, b) := (\alpha, \beta)$. De esta forma, la diferencial de φ se obtiene calculando las derivadas parciales; por ejemplo, la derivada $\frac{\partial\alpha}{\partial a}(a, b)$ vale:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(X(t), X(t - \tau)) \cos^2 t + \frac{\partial g}{\partial y}(X(t), X(t - \tau)) \cos t \cos(t - \tau)\right) dt.$$

Un caso especialmente sencillo es $g(x,y) = y$, es decir, la ecuación $u''(t)+u(t) = \varepsilon u(t-\tau)$, para la cual se obtiene la matriz ignorante

$$D\varphi(a,b) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \cos t \cos(t-\tau)\,dt & \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos(t-\tau)\,dt \\ \int_0^{2\pi} \cos t \operatorname{sen}(t-\tau)\,dt & \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(t-\tau)\,dt \end{pmatrix}$$

que milagrosamente se transforma en

$$D\varphi(a,b) = \begin{pmatrix} \cos\tau & \operatorname{sen}\tau \\ -\operatorname{sen}\tau & \cos\tau \end{pmatrix}.$$

En definitiva, la matriz será ignorante pero al menos es inversible, lo que refleja el hecho obvio (¿por qué?) de que la única solución para $\varepsilon \neq 0$ chico es la trivial. Pero además dice que para perturbaciones pequeñas de g hay una única solución 2π-periódica.

Como dijimos, queremos aplicar lo anterior para estudiar el comportamiento de un sistema $X'(t) = F(X_t, \mu)$ cerca de un valor de bifurcación de Hopf. Recordemos que F es suave y vale $F(0,\mu) = 0$ para todo μ, lo que permite escribir $F(\phi,\mu) = L(\mu)\phi + R(\phi,\mu)$ donde $L(\mu) := D_\phi F(0,\mu)$ y R es el resto de Taylor. La principal hipótesis es:

(H1) La ecuación lineal $X'(0) = L(0)X_t$ tiene una raíz característica simple y puramente imaginaria $\lambda_0 = i\nu_0$ con $\nu_0 > 0$.

Para fijar ideas, supongamos por un momento que se trata de una ecuación escalar, de modo que la hipótesis anterior dice que $\cos(\nu_0 t)$ y $\operatorname{sen}(\nu_0 t)$ están en el núcleo del operador $x' - L(0)x$ con condiciones T_0 periódicas, donde $T_0 := \frac{2\pi}{\nu_0}$. Como no queremos más cosas en el núcleo, vamos a imponer una hipótesis adicional: para toda raíz característica $\lambda \neq \pm i\nu_0$ vale

$$\lambda \neq m\lambda_0 \qquad \forall\, m \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Recordemos que la ecuación característica es $h(\lambda,\mu) := \det(\lambda I - L(\mu)_\lambda) = 0$, así que nuestra primera hipótesis dice que $h(\lambda_0, 0) = 0$ y $\frac{\partial h}{\partial \lambda}(\lambda_0, 0) \neq 0$, en donde la derivada es compleja. Por el teorema de la función implícita (la gran estrella de estos últimos tiempos), existen $\mu_0 > 0$ y una curva suave $\lambda : (-\mu_0, \mu_0) \to \mathbb{C}$ tal que $\lambda(\mu)$ es raíz característica simple de $L(\mu)$ y $\lambda(0) = \lambda_0$. Además, achicando μ_0 si hace falta, podemos suponer que $\operatorname{Im}(\lambda(\mu)) \neq 0$. La siguiente hipótesis es que la curva $\lambda(\mu)$ es transversal al eje imaginario, es decir: $\operatorname{Re}(\lambda'(0)) \neq 0$. Por conveniencia, invirtiendo la orientación de μ si hace falta podemos suponer que

$$\operatorname{Re}(\lambda'(0)) > 0, \tag{2}$$

es decir, la curva pasa del segundo cuadrante al primero por el valor λ_0 (la rima es involuntaria. Hasta aquí, veníamos hablando en prosa sin saberlo).

Como anticipamos, la idea es emplear el teorema de la función implícita para deducir, cuando μ es chico, la existencia de soluciones T-periódicas no constantes, con T cercano a T_0. Esto nos permite retomar una pregunta que dejamos picando en la clase anterior: ¿de qué sirve haber aprendido a encontrar soluciones con período fijo, si en realidad va a variar, vaya uno a saber de qué manera? Pero aquí es donde recobramos nuestra tan promocionada (en realidad algo inflada... así es el marketing) sangre fría para proponer la transformación $Y(t) = X(\eta t)$ con η cercano a 1.

De esta forma, el problema

$$X'(t) = F(X_t, \mu)$$

se convierte en uno equivalente con período fijo. Pero no todo es soplar y hacer botellas: a causa del retardo, nos vemos obligados a efectuar unos retoques. En efecto, al reemplazar en la ecuación obtenemos

$$Y'(t) = \eta X'(\eta t) = \eta F(X_{\eta t}, \mu)$$

que *no es* igual a $\eta F(Y_t, \mu)$, como ingenuamente esperábamos. Sin embargo, la cosa se arregla pues $X_{\eta t}(\theta) = X(\eta t + \theta) = X(\eta(t + \frac{\theta}{\eta})) = Y(t + \frac{\theta}{\eta})$. Luego, el problema a considerar es

$$Y'(t) = \eta F(Y_{t,\eta}, \mu)$$

donde $Y_{t,\eta}(\theta) := Y(t + \frac{\theta}{\eta})$ y vale que X es ηT_0-periódica si y solo si Y es T_0-periódica. La idea es pensar esta última ecuación como una perturbación de la ecuación lineal $Y'(t) = L(0)Y_t$; en otras palabras, consideraremos el espacio C_{T_0} y el operador resonante $\mathcal{L}Y := Y'(t) - L(0)Y_t$. La ecuación se escribe entonces como

$$\mathcal{L}Y = N_{\mu,\eta}Y,$$

con

$$N_{\mu,\eta}Y(t) = \eta F(Y_{t,\eta}, \mu) - L(0)Y_t = \eta L(\mu)Y_{t,\eta} - L(0)Y_t + \eta R(Y_{t,\eta}, \mu)$$

donde R no es otro que 'aquel resto de Taylor'. Y, como se puede adivinar, las hipótesis están puestas para que todo funcione bien. Para el lector rebosante de optimismo, cabe aclarar que la aplicación del método anterior para $\eta \approx 1$ y $\mu \approx 0$ no es inmediata.[1] Pero apelando a la solidaridad o, mejor, a la fe ciega del lector obtenemos (dijo el mosquito) el teorema de Hopf:

Teorema 0.1 *Supongamos que valen (H1), (1) y (2). Entonces existen $\varepsilon_0 > 0$, funciones pares $\mu(\varepsilon)$ y $T(\varepsilon) > 0$ para $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ con $\mu(0) = 0$, $T(0) = T_0 := \frac{2\pi}{\nu_0}$ y soluciones $T(\varepsilon)$-periódicas no constantes $p_\varepsilon = \varepsilon q_\varepsilon$, con q_0 una solución T_0-periódica del problema lineal $X' = L(0)X_t$. Más aun, estas soluciones son localmente únicas salvo cambios de fase, es decir: existen μ_0, β_0, $\delta > 0$ tales que si X es una solución T-periódica para algún $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ tal que $\|x\|_\infty < \beta_0$ y $|T - T_0| < \delta$ entonces $X(t) = p_\varepsilon(t + s, \varepsilon)$ para algún $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ y algún s.*

[1] A modo de entretenimiento, se puede observar en primer lugar que ahora $\mathcal{L}$ no es simétrico respecto del producto de L^2, así que para encontrar su imagen habría que calcular su adjunta.

En rigor, el cálculo cuidadoso permite decir algo más pidiendole más suavidad a F:

$$\mu(\varepsilon) = \mu_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

$$T(\varepsilon) = T_0[1 + \tau_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)].$$

Pero estos desarrollos son algo más que una 'cara bonita', pues en realidad brindan información adicional sobre la estabilidad de las soluciones (entendida de la misma forma en que definimos la estabilidad de un equilibrio). En efecto, si todas las otras raíces características para $\mu = 0$ tienen parte real negativa, entonces p_ε es asintóticamente estable cuando $\mu_1 > 0$ (bifurcación supercrítica) e inestable cuando $\mu_1 > 0$ (bifurcación subrcrítica).

En la clase próxima veremos cómo calcular de manera precisa (bah, más o menos!) la bifurcación de Hopf para la ecuación no lineal con feedback negativo $x'(t) = -f(x(t-\tau))$.