Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 15, versión muy preliminar. Críticas bienvenidas

En esta clase veremos algunas nociones elementales de la teoría de bifurcaciones. Intuitivamente, dado sistema dinámico que depende de un parámetro, una bifurcación es un cambio topológico en la estructura de las órbitas cuando dicho parámetro cruza cierto valor. Para fijar ideas, consideremos en primer lugar dos sistemas autónomos de ecuaciones ordinarias

$$X'(t) = f(X(t)), \qquad Y'(t) = g(Y(t))$$

con $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funciones suaves. Se dice que los sistemas dinámicos asociados son *topológicamente equivalentes* cuando existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que las órbitas del primer sistema que caen en U se transforman en órbitas del segundo sistema, preservándose la dirección en el tiempo. Una noción más general es la de equivalencia local. Cuando se trata de sistemas con parámetros

$$X'(t) = f(X(t), \alpha), \qquad Y'(t) = g(Y(t), \beta)$$

con $f, g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ suaves tales que $f(0, \alpha) = g(0, \beta) = 0$, se dice que los sistemas son equivalentes cerca del origen si para α cercano a 0 existe $\beta = \beta(\alpha)$ continua e inyectiva y un homeomorfismo $h_\alpha : U_\alpha \to V_\beta$ con U_α, V_β entornos del origen y $h_\alpha(0) = 0$ tales que las órbitas del primer sistema para α que caen en U_α se transforman en órbitas del segundo sistema para β, preservando la orientación. Una bifurcación consiste en un cambio de tipo topológico (es decir, la aparición de un retrato de fase no equivalente) a partir de la variación del parámetro α. Un ejemplo básico es el de la ecuación escalar de segundo orden

$$-u''(t) = \mu u(t)$$

que, como es usual, se transforma en un sistema $X'(t) = AX(t)$ mediante el cambio $x = u$, $y = u'$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}$. Cuando $\mu < 0$, los autovalores de A son $\pm\sqrt{-\mu}$ y el origen es un equilibrio inestable; en cambio, para $\mu > 0$ los autovalores son $\pm\sqrt{\mu}i$ y todas las soluciones son periódicas de período $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$. En particular, si estamos interesados en las condiciones T-periódicas para cierto T fijo, entonces al aumentar μ obtenemos uno a uno los valores del espectro del operador $Lu := -u''$ (empezando obviamente por 0, que corresponde a las autofunciones constantes):

$$\sigma(L) = \left\{ \left(\frac{2k\pi}{T}\right)^2 : k \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Existe un teorema muy conocido, debido a Hartman, que dice que si un equilibrio es *hiperbólico*, es decir, si todos los ceros de la ecuación característica tienen parte real no nula, entonces el tipo topológico queda completamente caracterizado por la cantidad p de autovalores con parte real positiva del sistema linealizado.[1] Es claro, además, que dicha cantidad implica se mantiene por perturbaciones pequeñas del parámetro α, ya que la función característica (en este caso un polinomio) es continua respecto de α, de modo que los cambios de estructura deben esperarse cuando se pierde hiperbolicidad. En general, esto puede ocurrir cuando para cierto valor del parámetro un autovalor se vuelve 0, pero también cuando aparece un par conjugado de raíces imaginarias puras, dando lugar a órbitas cerradas. Tal es el caso, en general, de las bifurcaciones de Hopf. Por ejemplo, consideremos como antes el sistema lineal $X' = AX$, ahora con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores para $|\mu| < 2$ son $\frac{\mu \pm \sqrt{4-\mu^2}\, i}{2}$. Mientras $\mu \neq 0$, el origen es un equilibrio hiperbólico, pero para $\mu = 0$ las raíces características son imaginarias puras y las órbitas son periódicas. Observemos que para $0 < |\mu| < 2$ las órbitas son espirales que, para $t \to +\infty$, convergen al origen si $\mu < 0$ y se alejan cuando $\mu > 0$.

En el caso de ecuaciones con retardo, vamos a estudiar la situación general

$$X'(t) = F(X_t, \mu)$$

en donde $F : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es suave y $F(0, \mu) = 0$ para todo μ. Como dijimos, estudiaremos el comportamiento del sistema a partir de la ecuación linealizada

$$X'(t) = L(\mu)(X_t)$$

donde $L(\mu)$ es la diferencial de F respecto de ϕ, es decir:

$$F(\phi, \mu) = L(\mu)(\phi) + R(\phi, \mu)$$

con $\frac{R(\phi,\mu)}{\|\phi\|_\infty} \to 0$ para $\|\phi\|_\infty \to 0$. La ecuación característica asociada al problema lineal tiene la forma

$$h(\lambda, \mu) := \det(\lambda I - L(\mu)_\lambda) = 0,$$

[1] Por supuesto, la cantidad de autovalores con parte real negativa es $n - p$. Esto no vale para las ecuaciones con retardo, aunque todavía es posible probar, bajo hipótesis apropiadas, que el sistema se comporta localmente como el linealizado.

donde las columnas de $L(\mu)_\lambda$ son

$$Col_j(L(\mu)_\lambda) = L(\mu)(\exp_\lambda e_j).$$

Bajo ciertas condiciones, veremos que si para $\mu = 0$ existen raíces simples $\lambda_0 = \pm i\nu_0$, entonces para valores pequeños de μ la ecuación tiene soluciones periódicas no constantes, con período cercano a $\frac{2\pi}{\nu_0}$. Antes de pasar al enunciado preciso, veamos un ejemplo típico, la ecuación

$$x'(t) = x(t-1)(x(t)^2 + x(t-1)^2 - \mu).$$

Para $\mu \leq 0$, el origen es el único equilibrio; en cambio, si $\mu > 0$ se tienen también los equilibrios $\pm\sqrt{\frac{\mu}{2}}$: a eso sí que podemos llamar un 'cambio de estructura', cuando se atraviesa el valor $\mu = 0$. Pero nos interesa más lo que ocurre en otro valor de μ que descubrimos, como quien no quiere la cosa, linealizando. Dicho y hecho, en este caso

$$f(x, y) = y(x^2 + y^2 - \mu) = -\mu y + R(x, y)$$

de modo que la linealización es

$$x'(t) = -\mu x(t-1).$$

Esta no es otra que la ecuación lineal con feedback que estudiamos en las primeras clases. Si seguimos con el tango, podemos preguntar:*¿Te acordás, hermano, lo linda que era?*. Y, si bien no es del todo atinado decir que *se juntaba rueda pa' verla bailar*, podemos afirmar al menos que nos juntamos 'pa' verla bifurcarse' en el valor $\mu = \frac{\pi}{2}$, para el cual vimos aparecer (a los fines literarios, se puede agregar aquí: 'súbitamente' o 'ante nuestros propios ojos') soluciones periódicas.[2] El equilibrio nulo es asintóticamente estable para $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$ y luego se vuelve inestable. Veamos que a partir del valor $\mu = \frac{\pi}{2}$ aparecen soluciones periódicas también para la ecuación no lineal. En efecto, podemos intentar directamente con $x(t) = r\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, para la que vale

$$x'(t) = -\frac{\pi r}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right), \qquad x(t-1) = r\cos\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = r\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right),$$

$$x(t)^2 + x(t-1)^2 = r^2.$$

Luego, basta elegir r tal que $-\frac{\pi}{2} = r^2 - \mu$, es decir: $r = \pm\sqrt{\mu - \frac{\pi}{2}}$. Esto es, a grandes rasgos, lo que predice el teorema de Hopf que veremos poco más adelante (¡paciencia! Ya llegará). Cabe sospechar, sin embargo, que otra vez nos engañaron, ya que las soluciones que aparecieron tienen exactamente el mismo período: llegado este punto, entendemos que la trampa del ejemplo consiste en que la tan mentada no-linealidad está inventada a propósito para que (Pitágoras

[2] Observemos también que, cuando $\mu \neq 0$, el origen es el único equilibrio, mientras que para $\mu = 0$ cualquier constante es un equilibrio, lo que nos hace intuir que 'algo especial' ocurre para cuando se atraviesa dicho valor.

mediante) al evaluarla sobre el subespacio indicado se comporte en realidad como un problema lineal. ¿Y cuál es 'el lugar indicado'? Por supuesto, el generado por $\{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\}$, que tiene toda la pinta de ser el núcleo de un operador. Esto nos lleva a hablar, una vez más, de los problemas resonantes (no está permitido hacer aquí el chiste de que 'estamos resonados').

En el caso anterior, el operador es $Lx(t) := x'(t) + \frac{\pi}{2}x(t-1)$ y las condiciones son $\frac{\pi}{2}$-periódicas; en general, veremos una manera de buscar soluciones T-periódicas de una ecuación de la forma $Lx = Nx$, donde L es un operador diferencial lineal no inversible en el espacio C_T de funciones continuas T-periódicas y $N : C_T \to C_T$ es no lineal.

Para comenzar, vamos a ver el caso algo más sencillo de resonancia en el autovalor nulo. Consideremos la ecuación

$$X'(t) = F(t, X_t) := NX(t)$$

con $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ continua y T-periódica en t. Algunas clases atrás vimos la forma de encontrar soluciones por medio del teorema de Schauder, intentando 'zafar' de la resonancia (por decirlo de un modo elegante). Pero ahora apelaremos a toda nuestra sangre fría y observaremos, en primer lugar, que $LX = X'$ es (interpretado adecuadamente) un operador de Fredholm. Sin entrar en detalles, notemos que su núcleo es el conjunto de funciones constantes (identificado con $\mathbb{R}^n$) y su imagen es el conjunto de funciones de promedio 0, que es justamente el complemento del subespacio de las funciones constantes. Esto último se ve de manera inmediata, escribiendo la solución del problema $X'(t) = \varphi(t)$ como $X(t) = X_0 + \int_0^t \varphi(s)\,ds$: es claro que hay solución T-periódica si y solo si $\overline{\varphi} := \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,dt = 0$. Notemos, además, que X_0 puede ser cualquiera, hecho que se debe justamente a que $\ker(L) = \mathbb{R}^n$. Pero esta solución es única si pedimos, por ejemplo, que la solución tenga promedio nulo: para esto, alcanza con elegir el (ahora sí) único X_0 tal que

$$X_0 + \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^t \varphi(s)\,ds\,dt = 0$$

Esto define un operador inverso a derecha de L, dado por $K\varphi = X$. Es fácil verificar (para usos múltiples) que K es compacto. En este contexto, observemos que $X \in C_T$ es solución si y solo si $X - \overline{X} = K(NX)$. Sin embargo, esta afirmación lleva implícita una segunda propiedad para NX, necesaria para pueda formar parte del selectísimo conjunto de funciones que se pueden meter dentro de K: tiene que tener promedio nulo. Esto hace que sea difícil trabajar con la ecuación anterior. Una primera respuesta instintiva a esto podría ser intentar trabajar en el conjunto (con suerte, la variedad) $\{X : \overline{NX} = 0\}$, pero después de pensarlo un poco, vemos que conviene buscar otra opción más cómoda. En principio, podemos despreocuparnos por completo de la restricción impuesta por el dominio de K justamente proyectando NX sobre dicho conjunto: la ecuación anterior se convierte entonces en

1. $X - \overline{X} = K(NX - \overline{NX})$.

Pero esto no alcanza ya que, además, debe valer

2. $\overline{NX} = 0$

En resumen, $X \in C_T$ es solución si y solo si se verifican las dos propiedades anteriores. O, mejor todavía, podemos resumir ambas propiedades en una única ecuación de punto fijo:

$$X = \overline{X} + \overline{NX} + K(NX - \overline{NX}).$$

A modo de ejemplo (algo tendencioso), veamos una aplicación clásica: el método llamado de *averaging*, que sirve para resolver, para ε cercano a 0, ecuaciones del tipo

$$X'(t) = \varepsilon F(t, X_t, \varepsilon).$$

Ahora F es una función suave definida en $\mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$. Haciendo caso omiso de las críticas (a pesar de ser bienvenidas), llamaremos f a su restricción al subespacio de funciones constantes, es decir, la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada (de un modo un tanto tautológico) por $f(t, X, \varepsilon) := F(t, X, \varepsilon)$. Uno podría preguntarse para qué pedimos 'suavidad' cuando antes alcanzaba con 'continuidad'... y la respuesta es fácil de adivinar: vamos a usar el teorema de la función implícita para encontrar una rama de ceros de la ecuación

$$\mathcal{F}(X, \varepsilon) = 0,$$

donde $\mathcal{F}$ es la función definida por:

$$\mathcal{F}(X, \varepsilon) := X - \left[\overline{X} + \overline{N_\varepsilon X} + \varepsilon K(N_\varepsilon X - \overline{N_\varepsilon X})\right],$$

con $N_\varepsilon X(t) := F(t, X_t, \varepsilon)$. El lector despierto (¿hmmmmm?) habrá observado que esta definición no es *exactamente* igual a la de antes, ya que al término $\overline{N_\varepsilon X}$ en realidad le hemos birlado un ε (total, ¿quién se fija?). Justamente, ese es el truco clave para que la cosa funcione: como no nos interesan las soluciones con $\varepsilon = 0$ (ya las conocemos: cualquier elemento de $\mathbb{R}^n$), nuestra definición de $\mathcal{F}$ apunta a que podamos 'ramificar' a partir de ciertas soluciones especiales, que verifican $\mathcal{F}(X_0, 0) = 0$. Notemos que *cualquier* cero de $\mathcal{F}(\cdot, 0)$ es necesariamente constante y, aunque el panorama todavía es bastante sombrío, empieza a mejorar, ya que la restricción de $\mathcal{F}(\cdot, 0)$ a $\mathbb{R}^n$ tiene un aspecto muy agradable:

$$\mathcal{F}(X, 0) = -\overline{N_0 X} = -\frac{1}{T}\int_0^T f(t, X, 0)\, dt := \varphi(X),$$

donde (omitiendo un nuevo isomorfismo: ya somos expertos en eso) φ es ahora una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Con la idea de usar el teorema de la función implícita, vamos a pedir que X_0 sea un cero de φ tal que $D\varphi(X_0)$ sea inversible. Pero después de haber lidiado con operadores diferenciables en espacios de Banach, resulta preocupante que $D\varphi(X_0)$ pueda pensarse como una simple matricita. ¿Alcanzará esto para asegurar que $D_X\mathcal{F}(X_0, 0) : C_T \to C_T$ es un isomorfismo, como pretenden los exigentes usuarios del teorema de la función implícita? Para ganar tiempo, calculemos al menos cuánto vale la diferencial, mirando directamente las derivadas direccionales:

$$D_X\mathcal{F}(X_0,0)(\psi) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{F}(X_0+h\psi,0)-\mathcal{F}(X_0,0)}{h}.$$

En lo anterior, cabe aclarar que si bien $X_0 \in \mathbb{R}^n$, lo estamos 'junando'[3] dentro de C_T y por eso las direcciones están dadas por cualquier $\psi \in C_T$. Y si bien $\mathcal{F}(X_0,0)$ vale 0, conviene tenerlo presente a la hora de calcular el anterior límite metiéndolo (como corresponde, sin preocuparnos por nada) dentro de la integral. En resumen:

$$D_X\mathcal{F}(X_0,0)(\psi) = \psi - \overline{\psi} - \frac{1}{T}\int_0^T D_X f(t,X_0,0)\psi(t)\,dt.$$

Esto alcanza para probar directamente que $D_X\mathcal{F}(X_0,0)$ es biyectiva... y el resto depende de usted[4] (o, mejor dicho, del teorema de la aplicación abierta). En efecto, notemos que

$$D_X\mathcal{F}(X_0,0)(\psi) = \xi \Longleftrightarrow \xi = \psi - w,$$

con

$$w = \overline{\psi} + \frac{1}{T}\int_0^T D_X f(t,X_0,0)\psi(t)\,dt \in \mathbb{R}^n.$$

Pero en tal caso $\overline{\xi} = \overline{\psi} - w$ y vale

$$\overline{\xi} = \frac{1}{T}\int_0^T D_X f(t,X_0,0)(w+\xi(t))\,dt = D\varphi(X_0)w + \frac{1}{T}\int_0^T D_X f(t,X_0,0)\xi(t)\,dt.$$

Como $D\varphi(X_0)$ es inversible (¡mirala vos a nuestra matricita!), para toda $\xi \in C_T$ existe un único $w \in \mathbb{R}^n$ que verifica lo anterior y entonces $\psi = \xi + w$ es la (única) solución de la ecuación $D_X\mathcal{F}(X_0,0)(\psi) = \xi$. Pasado este momento de alta excitación, podemos ahora serenarnos en nuestra acción[5] y, ya muy relajados, explicar con tono triunfal: existen $\varepsilon_0 > 0$, $U \subset C_T$ entorno de X_0 y una única función suave $X : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to U$ tal que $X(0) = X_0$ y $\mathcal{F}(X(\varepsilon),\varepsilon) = 0$.

Pero siempre hay alguien que arruina los triunfos, en este caso nosotros mismos[6] con dos preguntas. La primera: ¿qué ocurre si intentamos aplicar lo anterior a un problema autónomo $X'(t) = \varepsilon F(X_t, \varepsilon)$? El nombre del método hace sospechar que la integración respecto de t no es un detalle menor y, en efecto, la cosa pierde toda su gracia en la medida que ahora φ coincide con $f(\cdot, 0)$, y el teorema de la función implícita simplemente detecta la existencia de

[3] Se te juna desde lejos, pelandruna abacanada.

[4] Para lectores menos vetustos que el autor, conviene aclarar que la frase pertenece al clásico televisivo *Las manos mágicas* en el que, entre otros trucos, se mostraba cómo calcular a gran velocidad la derivada de Fréchet de operadores complicadísimos.

[5] *Cf. El sueño del pibe*: ...tomó la pelota sereno en su acción/ gambeteando a todos, se enfrentó al arquero/y con fuerte tiro rompió el marcador.

[6] Se puede traer a colación el escrito de S. Freud sobre *el que fracasa al triunfar*.

una rama de soluciones constantes (equilibrios). Esto no es casualidad, porque se trata de un problema de resonancia en el autovalor nulo: en la próxima clase veremos que las bifurcaciones de Hopf se buscan justamente cuando hay autovalores de la forma $\lambda = i\nu_0$ con $\nu_0 \neq 0$. Y la otra pregunta es más bien una objeción: como anticipamos, al cruzar un valor de bifurcación de Hopf lo que aparece son soluciones con período 'aproximadamente' iguales a cierto T_0, pero que no están fijos. ¿De qué nos sirve aprender a buscar soluciones T-periódicas con T fijo? Dejamos esto en suspenso hasta la próxima clase, pero anticipamos que -como antes, con algo de sangre fría- la situación se puede finalmente acomodar para volver a exclamar: ¡que sigan los éxitos!