Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 14, versión preliminar. Críticas bienvenidas

En la última clase comenzamos a ver las funciones de Lyapunov, útiles para estudiar la estabilidad de un equilibrio o, como veremos, más en general para probar que el ω-límite de cualquier trayectoria que comienza en cierto conjunto está contenido en el conjunto crítico $\{\dot{V} = 0\}$.

Según dijimos, para el caso de un sistema con retardo $X'(t) = F(X_t)$ la función V de Lyapunov es en realidad un funcional, definido como corresponde en cierto subconjunto D del espacio $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. De manera análoga a la que conocemos para ecuaciones ordinarias, la idea es que V tenga la forma aproximada de un paraboloide. En general, vamos a pedir:

1. $V : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continua.
2. $$\dot{V}(\phi) := \lim_{h \to 0^+} \frac{V(X_h(\phi)) - V(\phi)}{h}$$
   está definida y vale $\dot{V}(\phi) \leq 0$ para toda $\phi \in D$.

Recordemos que $X_h(\phi)$ denota la trayectoria que comienza en ϕ, evaluada a tiempo h, es decir: $X_h(\phi) = \Phi(h, \phi)$ o, equivalentemente, $X_h(\phi)(s) = X(s+h, \phi)$ para todo $s \in [-\tau, 0]$.

Es tentador (por decirlo de algún modo... en todo caso, la tentación tiene múltiples variantes) pensar que, al igual que en los sistemas de ecuaciones ordinarias, si se asume que V es suave entonces $\dot{V}$ puede pensarse directamente como una condición que no involucra explícitamente el (semi)flujo. En efecto, reescribiendo el anterior cociente incremental como

$$\frac{V(X_h(\phi)) - V(\phi)}{h} = \frac{V(\Phi(h, \phi)) - V(\Phi(0, \phi))}{h} = \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} \to \varphi'(0),$$

donde $\varphi := V \circ \Phi(\cdot, \phi))$ y aplicando regla de la cadena , obtenemos:

$$\dot{V}(\phi) = DV(\Phi(0, \phi))(D\Phi(\cdot, \phi)|_{t=0}).$$

Pero (seguimos pensando),

$$D\Phi(\cdot, \phi)|_{t=0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\Phi(h, \phi) - \Phi(0, \phi)}{h} = \frac{\partial \Phi(\cdot, \phi)}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

y llegamos a algo que resulta esencialmente verdadero pero tristemente falso. A los fines de calcular cosas 'a lo bruto' funciona, pensando simplemente que la derivada del flujo que -¡no olvidar!- es un elemento del espacio $C([-\tau,0],\mathbb{R}^n))$, evaluada en cualquier $s\in[-\tau,0]$ vale

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{X(h+s,\phi)-X(s,\phi)}{h}=X'(s,\phi).$$

A decir verdad, para poder asegurar que $D\Phi(\cdot,\phi)|_{t=0}=X_s(\phi)'$ falta un detalle: como estamos trabajando en el espacio de funciones continuas, la convergencia debe ser uniforme en s. Pero esto se verifica fácilmente; el verdadero problema (recién ahora nos avivamos) es que como $s\in[-\tau,0]$, la solución X coincide con ϕ, de modo que la derivada anterior da exactamente ϕ'... claro, eso en caso de que ϕ sea derivable. Por supuesto, si en lugar de ϕ ponemos X_{t_0} para algún t_0 razonablemente grande (léase: mayor que τ), entonces el límite anterior funciona perfectamente bien y da por resultado $X'_{t_0}(0)=F(X_{t_0})$. En otras palabras, vale

$$\dot V(X_{t_0})=DV(X_{t_0})(F(X_{t_0})),$$

lo que reproduce la idea, válida en el caso sin retardo, de escribir la condición para la función de Lyapunov en la forma

$$\nabla V(X)\cdot F(X)\le 0.$$

Asumiendo que el lector tiene un espíritu más bien refinado y no está familiarizado con los brutos procederes, conviene ver un ejemplo para entender que, en algunos casos, la brutalidad no es un método del todo despreciable. Consideremos la ecuación (escalar) lineal

$$x'(t)=ax(t)+bx(t-\tau)$$

e intentemos construir una función de Lyapunov para probar, bajo condiciones apropiadas, la estabilidad del equilibrio nulo. Si Lyapunov pide paraboloides, démosle paraboloides... o al menos algo que se le parezca, por ejemplo:

$$V(\phi)=\frac{\phi(0)^2}{2}+\mu\int_{-\tau}^{0}\phi(s)^2\,ds$$

con $\mu>0$ a definir. Como dijimos, el objetivo es que V 'acompañe' las trayectorias hasta depositarlas grácilmente, para $t\to+\infty$ en el origen (lo de 'grácil' no es más que un recurso literario, no muy compatible con la brutalidad que el lector está a punto de presenciar). Es inmediato verificar que V es diferenciable en el sentido de Fréchet y vale

$$DV(\phi)(\psi)=\phi(0)\psi(0)+2\mu\int_{-\tau}^{0}\phi(s)\psi(s)\,ds.^1$$

[1]Esto queda como ejercicio. Se puede, una vez más (pero que no se transforme en hábito) derivar a lo bruto, o simplemente calcular el límite usando el hecho de que V es una forma cuadrática.

Pero entonces, la fórmula anterior dice:

$$\dot V(\phi) = DV(\phi)(\phi') = \phi(0)\phi'(0) + 2\mu\int_{-\tau}^{0}\phi(s)\phi'(s)\,ds.$$

No hay problemas con el primer término (y, de hecho, esto no es casualidad porque corresponde a la parte sin retardo): aunque ϕ no sea derivable, podemos suponer (abusando un poco de la notación) que se trata de su derivada por derecha, es decir, la derivada de $x(t,\phi)$ en $t=0$. En cambio, para la parte que aparece dentro de la integral la sensación es que estamos fritos, ya que la ecuación no rige para $s\le 0$. Sin embargo, si ϕ es derivable vale $2\phi\phi' = (\phi^2)'$ y entonces por el ya mencionado *methodus Brutus* resulta:

$$\dot V(\phi) = \phi(0)(a\phi(0) + b\phi(-\tau)) + \mu\int_{-\tau}^{0}(\phi^2(s))'\,ds$$

$$= \phi(0)(a\phi(0) + b\phi(-\tau)) + \mu(\phi(0)^2 - \phi(-\tau)^2).$$

Pero los métodos de Brutus han sido muy criticados por los historiadores (aunque, hasta la fecha, son pocos los que han objetado su efectividad). Así que vamos a dar al César lo que es del César y hacer las cuentas con mayor cuidado. El límite correspondiente al primer término es inmediato y coincide con lo que dio antes:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{x_h(\phi)(0)^2 - \phi(0)^2}{2h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{x(h,\phi)^2 - x(0,\phi)^2}{2h}$$
$$= x(0,\phi)x'(0,\phi) = \phi(0)(a\phi(0) + b\phi(-\tau)).$$

En cambio, el otro término requiere un poco más de atención, ya que tenemos terminantemente prohibido derivar dentro de la integral. Sn embargo, para cualquier función continua φ, sea o no derivable, se cumple

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-\tau}^{0}\frac{\varphi(h+s)-\varphi(s)}{h}\,ds = \lim_{h\to 0^+}\frac{\int_{-\tau+h}^{h}\varphi(s)\,ds - \int_{-\tau}^{0}\varphi(s)\,ds}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{\int_{0}^{h}\varphi(s)\,ds - \int_{-\tau}^{-\tau+h}\varphi(s)\,ds}{h} = \varphi(0) - \varphi(-\tau).$$

Esto último no es ninguna brutalidad sino simplemente el teorema fundamental del cálculo y, aplicado a la función $\varphi = \phi^2$, nos da exactamente lo mismo que antes. Entonces podemos asegurar que

$$\dot V(\phi) = (a+\mu)\phi(0)^2 + b\phi(0)\phi(-\tau) - \mu\phi(-\tau)^2,$$

es decir, $\dot V(\phi) = W^T A W$ donde W es el vector $(\phi(0), \phi(-\tau))$ (escrito como columna) y $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ está dada por

$$\begin{pmatrix} \mu + a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & -\mu \end{pmatrix}.$$

Queremos lograr que valga $\cdot V(\phi) \leq 0$, de modo que tenemos que encontrar condiciones para que A sea definida negativa. Haciendo gala de nuestros cálidos recuerdos de Análisis I, podemos asegurar que esto va a ocurrir (estrictamente) cuando el determinante es positivo y el primer coeficiente es negativo, es decir:

$$\mu < -a, \qquad b^2 < -4a(\mu + a).$$

Pero el valor $\mu > 0$ lo podemos elegir libremente, de modo que, si a es negativo, conviene tomar $\mu = -\frac{a}{2}$, porque da el mejor valor posible para b:

$$b^2 < 4\frac{a}{2}\left(a - \frac{a}{2}\right) = a^2.$$

En otras palabras, cuando $a < 0$ y $|b| < -a$ el equilibrio nulo es asintóticamente estable. Cabe observar que la condición es la misma que obtuvimos en las primeras clases para la estabilidad absoluta (independiente de τ).

Claro que en realidad todo esto es por ahora una expresión de deseo, pues apenas nos 'inspiramos' en lo que nos dice Lyapunov para las ecuaciones ordinarias. Pero ya es suficiente para empezar a fantasear: ¿será cierto? La respuesta (felizmente afirmativa) viene dada por el siguiente resultado, llamado *principio de invariancia de LaSalle.*

Teorema 0.1 *Supongamos que F es compacta y sea $V : \overline{D} \to \mathbb{R}$ como antes. Supongamos, además, que para toda $\phi \in D$ la trayectoria $X_t(\phi)$ está acotada y se mantiene dentro de D para todo $t \geq 0$. Entonces $\emptyset \neq \omega(\phi) \subset \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es el subconjunto invariante maximal de $S := \{\psi \in \overline{D} : \dot{V}(\psi) = 0\}$.*

Antes de preguntar ¿y esto con qué se come?, conviene entender lo que ocurre en el ejemplo anterior, para el cual $D = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ y

$$S = \{\psi : \dot{V}(\psi) = 0\} = \{\psi : \psi(0) = \psi(-\tau) = 0\}.$$

El teorema dice que el ω-límite de cualquier ϕ está contenido en $\mathcal{I}$, que es el subconjunto invariante maximal de S. Veamos que $\mathcal{I} = \{0\}$ y, en consecuencia, $\omega(\phi) = \{0\}$ para toda ϕ. En efecto, aunque S contiene 'muchas cosas', el subconjunto $\mathcal{I}$ es invariante, lo cual implica que $x_t(\psi) \in \mathcal{I}$ para todo $t \geq 0$ y toda $\psi \in \mathcal{I}$. Pero esto significa que $x_t(\psi)(0) = x_t(\psi)(-\tau) = 0$ para todo $t \geq 0$, es decir:

$$x(t, \psi) = x(t - \tau, \psi) = 0$$

para todo $t \geq 0$. Se deduce que $x(t, \psi) = 0$ para todo $t \geq -\tau$ y, en particular, $\psi \equiv 0$. Vemos, entonces, que el resultado del teorema se ajusta más o menos a lo que esperábamos, así que es hora de pasar a la...

Demostración del teorema: ya sabemos (¿no?) que $\omega(\phi)$ es no vacío y compacto. Como vale

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{V(X_{t+h}(\phi)) - V(X_t(\phi))}{h} = \dot{V}(X_t(\phi)) \leq 0$$

para todo t, deducimos que la función $t \mapsto V(X_t(\phi))$ es decreciente. Además, es composición de funciones continuas y acotada, pues $\mathcal{O}_+(\phi)$ tiene clausura compacta. En consecuencia, $V(X_t(\phi)) \searrow c$ para cierta constante c. Tomemos ahora $\psi \in \omega(\phi)$ y $t_n \to +\infty$ tales que $\Phi(t_n, \phi) \to \psi$. Destrabando lenguas, tenemos que $X_{t_n}(\phi) \to \psi$; luego $V(X_{t_n}(\phi)) \to V(\psi)$ y entonces $V(\psi) = c$. Esto significa que $\omega(\phi)$ está contenido en el 'conjunto de nivel c', es decir:

$$\omega(\phi) \subset \{\psi \in \overline{D} : V(\psi) = c\}.$$

Sabemos también (¿eh?) que $\omega(\phi)$ es invariante, de modo que, por la misma cuenta de antes, $V(X_t(\psi)) = c$ para toda $\psi \in \omega(\phi)$. Esto implica, finalmente, que

$$\dot{V}(\psi) = \lim_{h \to 0^+} \frac{V(X_h(\psi)) - V(\psi)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Como el conjunto invariante maximal $\mathcal{I}$ es -quién lo hubiera dicho- invariante y maximal, se deduce que $\omega(\phi) \subset \mathcal{I}$. □

Para no entusiasmarnos más de la cuenta, conviene aclarar que la construcción de una función de Lyapunov es bastante artesanal y el esfuerzo no siempre lleva a buen puerto. En general, no es posible afirmar que, dado un equilibrio estable, existe siempre una función de Lyapunov. Para el problema lineal escalar, vimos que la existencia de V es equivalente a la estabilidad independiente de τ, aunque para el caso de un sistema lineal se trata de un problema abierto: ¿la estabilidad absoluta implica la existencia de V? Para analizar esto con más detalle, consideremos el sistema

$$X'(t) = AX(t) + BX(t - \tau)$$

y supongamos que todos los autovalores de A tienen parte real negativa (en el caso escalar, esto equivale a pedir $a < 0$ que, como sabemos, es condición necesaria para lograr estabilidad absoluta). Con ayuda de alguien que se acuerde algo de álgebra lineal, consideremos una matriz simétrica C tal que $A^T C + CA = -D$, donde D es una matriz diagonal definida positiva. La función de Lyapunov que vamos a considerar ahora es

$$V(\phi) = \phi(0)^T C \phi(0) + \int_{-\tau}^{0} \phi(s)^T E \phi(s)\, ds$$

donde E es una matriz definida positiva que cumple el rol de μ en el caso anterior. Es fácil verificar (¡ah, siempre nos dicen lo mismo!) que

$$\dot{V}(\phi) = -\phi(0)^T D\phi(0) + \phi(0)^T (CB + B^T C)\phi(-\tau) + \phi(0)^T E\phi(0) - \phi(-\tau)^T E\phi(-\tau),$$

lo cual, para empeorar un poco las cosas, se puede escribir:

$$W^T M W$$

donde $W^T = (\phi(0)^T, \phi(-\tau)^T)$ y M es la matriz definida en bloques

$$M = \begin{pmatrix} E - D & \frac{CB + B^T C}{2} \\ \frac{CB + B^T C}{2} & -E \end{pmatrix}.$$

Entonces la pregunta es: ¿bajo qué condiciones sobre A y B se puede garantizar la existencia de E tal que M es definida negativa? Aunque la respuesta más honesta sería, a grandes rasgos, decir 'ni idea', podemos intentar sacar algo en limpio para algunas situaciones específicas. Sabemos que D es positiva, asi que eligiendo E tal que $D - E$ sea positiva, podemos estar seguros de que M es definida negativa cuando B está suficientemente cerca de la matriz nula. No es gran cosa, pero al menos es consistente con el hecho de que las soluciones de la ecuación característica

$$det(I - A - Be^{-\lambda\tau}) = 0$$

tienen parte real negativa para B en cierto entorno de 0.

En la próxima clase comenzaremos a ver las nociones básicas de la teoría de bifurcaciones de Hopf, que esencialmente permite asegurar la existencia de soluciones periódicas que, bajo la mirada aprobatoria de Borges, se 'bifurcan' a partir de un punto de equilibrio de un sistema dinámico cuando cierto parámetro que se mueve en forma continua atraviesa determinado valor. Concretamente, en nuestro caso supondremos una familia de ecuaciones con retardo

$$X'(t) = F(X_t, \mu)$$

en donde $F : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es suave (tanto como haga falta) y 0 es punto de equilibrio para todo valor del parámetro μ, es decir:

$$F(0, \mu) = 0.$$

Nos interesa analizar el comportamiento del sistema a partir del estudio de la ecuación linealizada

$$X'(t) = L(\mu)(X_t)$$

donde $L(\mu)$ es la diferencial de F respecto de ϕ, es decir:

$$F(\phi, \mu) = L(\mu)(\phi) + R(\phi, \mu)$$

con $\frac{R(\phi,\mu)}{\|\phi\|_\infty} \to 0$ para $\|\phi\|_\infty \to 0$. Recordemos (¡claro, claro!) que a pesar de que $L(\mu)$ es un operador lineal (continuo) definido en un espacio de dimensión infinita, la ecuación característica asociada al problema lineal tiene la forma

$$\det(\lambda I - L(\mu)_\lambda) = 0,$$

donde $L(\mu)_\lambda$ es una matriz hecha y derecha, cuyo coeficiente ij está dado por

$$(L(\mu)_\lambda)_{ij} = L(\mu)_i(\exp_\lambda e_j).$$

Pero como dice el tango (tangazo, dicho sea de paso), a esta altura el lector debe estar *curda ya de recuerdos*, así que mejor nos vamos con la música a otra parte... hasta la próxima clase.