Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 13, versión preliminar. Críticas bienvenidas

En la clase pasada vimos algunas propiedades de los sistemas monótonos y, en particular, comenzamos a analizar el sistema autónomo inducido por la ecuación

$$x'(t) = f(x(t), x(t-\tau)) \tag{1}$$

con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y creciente en su segunda coordenada. Si consideramos en $E = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ el orden usual dado $\phi \leq \psi$ si y solo si $\phi(t) \leq \psi(t)$ para todo t, entonces probamos que el semiflujo $\Phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times E \to E$ es creciente en su segunda coordenada, es decir: para $\phi \leq \psi$ y todo $t \geq 0$ vale que $\Phi(t, \phi) \leq \Phi(t, \psi)$. Esta última es una desigualdad en E, que también se puede escribir $x_t(\phi) \leq x_t(\psi)$ y equivale a decir

$$x(t, \phi) \leq x(t, \psi) \ \text{ para todo}\, t.$$

Pero también vimos que si $f(a, a) \geq 0$ entonces

1. $x(t, \phi) \geq x(t, a) \geq a$ para todo $t \geq 0$.
2. $x(t, a)$ es creciente y, si está acotada, converge a un equilibrio.

Esto permite probar un resultado de estabilidad análogo al caso (sumamente sencillo) de una ecuación escalar sin retardo. A tal efecto, observemos (¿recordemos?) primero que, dada la ecuación

$$x'(t) = f(x(t))$$

con f localmente Lipschitz vale, para cada equilibrio e (es decir, para cada e tal que $f(e) = 0$), el siguiente criterio:

1. Si $f > 0$ en $[e - \delta, e)$ y $f < 0$ en $(e, e + \delta]$, entonces e es localmente asintóticamente estable. Más precisamente, si $|x(0) - e| \leq \delta$ entonces $x(t) \to e$ para $t \to +\infty$.
2. Si $f < 0$ en $[e - \delta, e)$ y $f > 0$ en $(e, e + \delta]$, entonces e es inestable, en el sentido de que las soluciones (distintas de e) que comienzan en la franja $[e - \delta, e + \delta]$ se 'escapan' y luego no vuelven a entrar.

Lo anterior es inmediato a partir de la ecuación e implica, por ejemplo, que si e es un cero simple de f entonces su estabilidad local queda completamente determinada por el signo de $f'(e)$, en caso de que la derivada exista. Más en general, podemos expresarlo de la siguiente manera para un intervalo arbitrario $[a,b]$ que contiene el equilibrio e:

1. Si $(x-e)f(x) < 0$ para $x \in [a,b]\setminus\{e\}$ entonces toda solución con condición inicial $x_0 \in [a,b]$ está globalmente definida y converge a e.

2. $(x-e)f(x) < 0$ para $x \in [a,b] \setminus \{e\}$ entonces las soluciones con condición inicial $x_0 \in [a,b] \setminus \{e\}$ se alejan de e hasta salir del segmento $[a,b]$.

Como veremos, el mismo resultado vale para la ecuación (1) con f de clase C^1 y creciente en la segunda coordenada.

Proposición 0.1 *Sea f como antes y sea $e \in \mathbb{R}$ un equilibrio.*

1. *Si $(x-e)f(x,x) < 0$ para $x \in [a,b] \setminus \{e\}$ entonces toda solución con condición inicial ϕ tal que $\phi(t) \in [a,b]$ para todo t está globalmente definida y converge a e.*

2. *$(x-e)f(x,x) < 0$ para $x \in [a,b]\setminus\{e\}$ entonces las soluciones con condición inicial ϕ tal que $\phi(t) \in [a,b]\setminus\{e\}$ para todo t salen del intervalo para algún t.*

Demostración: Observemos en primer lugar que no hay otros equilibrios en el intervalo. En el primer caso, $f(a,a) > 0 > f(b,b)$, de modo que por la proposición que vimos en la clase previa vale

$$a \leq x(t,a) \leq x(t,\phi) \leq x(t,b) \leq b$$

para todo t y

$$x(t,a) \nearrow e, \qquad x(t,b) \searrow e,$$

de donde se deduce que $x(t,\phi) \to e$.

En el segundo caso, si por ejemplo $\phi(t) \in (e,b]$ para todo t entonces existe $c > e$ tal que $\phi(t) \geq c$ para todo t y $f(c,c) > 0$; luego, $x(t,\phi) \geq x(t,c)$. Pero $x(t,c)$ crece y no converge a ningún valor de $(e,b]$ ya que no hay otros puntos de equilibrio; en consecuencia, se escapa del intervalo y también lo hace $x(t,\phi)$. $\square$

Por ejemplo, podemos considerar una vez más la ecuación de Nicholson

$$x'(t) = -dx(t) + bx(t-\tau)e^{-x(t-\tau)}.$$

Claramente, la función $f(x,y) = -dx + bye^{-y}$ no cumple las hipótesis anteriores, aunque sí vale $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \geq 0$ para $y \leq 1$, de modo que los resultados se aplican para equilibrios que se encuentran debajo de dicho valor. Tal es el caso del equilibrio nulo que, como ya vimos en la práctica 1, es estable para $b < d$. Este hecho se vuelve a confirmar a partir de este nuevo enfoque, ya que $xf(x,x) =$

$x^2(-d+be^{-x}) > 0$ si $x \neq 0$ es suficientemente pequeño. Para $b > d$, en cambio, el equilibrio nulo es inestable; además, se tiene también el equilibrio positivo $x^* = \ln \frac{b}{d}$ (el lector comprenderá aquí la conveniencia de no seguir llamando e al equilibrio). Cuando $x^* < 1$, es decir, $b < de$, se aplica el resultado anterior y se concluye que x^* es asintóticamente estable. Sin embargo, para lograr que valiera la monotonía nos vimos obligados a imponer una condición más restrictiva de la que se pide para verificar la estabilidad vía linealización (ver práctica 1).

A continuación veremos otra herramienta habitual para probar la estabilidad de un equilibrio: las *funciones de Liapunov*. A modo de idea inspiradora, consideremos el caso simple de un sistema de ecuaciones ordinarias

$$X'(t) = f(X(t))$$

y supongamos que f verifica:

$$f(X) \cdot X < 0.$$

Esta es una hipótesis que ya hemos usado: si vale para $|X| = R$ garantiza que las soluciones que comienzan en $B_R(0)$ permanecen allí, ya que el campo definido por f apunta hacia adentro en $\partial B_R(0)$. Pero si suponemos que vale para todo $X \in B_R(0) \setminus \{0\}$, entonces el campo apunta hacia adentro en todos lados y las soluciones se ven 'forzadas' a acercarse al origen. En efecto, observemos en primer lugar que por continuidad vale $f(0) = 0$ (alcanza con mirar el límte sobre rectas sX con $s \to 0$) y

$$X'(t) \cdot X(t) = f(X(t)) \cdot X(t) < 0$$

para $X(t) \neq 0$. Esto dice que $\|X(t)\|^2$ es decreciente y luego converge. Por el teorema de valor medio, existe $t_n \to +\infty$ tal que $X'(t_n) \cdot X(t_n) \to 0$ y, tomando una subsucesión, podemos suponer que $X(t_n)$ converge a cierto X. Se deduce que $f(X) \cdot X = 0$, de donde $X = 0$ y (como la norma es decreciente) concluimos que $X(t) \to 0$.

El caso anterior $V(X) := \|X\|^2$ es apenas un ejemplo particular -el más típico- de las funciones de Lyapunov que, intuitivamente, 'guían' a las trayectorias hacia un equilibrio e. Más en general, podemos suponer que $e = 0$, $f(0) = 0$ y definir, para un entorno abierto y acotado $U \subset \mathbb{R}^n$ del 0, una función $V : U \to \mathbb{R}$ 'tipo paraboloide', en el sentido de que V es positiva en $U \setminus \{0\}$, se anula en 0, y, además,

$$\langle \nabla V(X), f(X) \rangle < 0$$

para todo $X \neq 0$. Con esto alcanza para probar que las soluciones que se mantienen dentro de U convergen al equilibrio, por un razonamiento similar al anterior. Por regla de la cadena, vemos que

$$(V \circ X)'(t) = \langle \nabla V(X(t)), f(X(t)) \rangle < 0$$

y entonces $V \circ X(t)$ converge a cierto $r \geq 0$. Tomando como antes una sucesión $t_n \to +\infty$ tal que $(V \circ X)'(t_n) \to 0$ y usando el hecho de que U es acotado, podemos suponer que $X(t_n) \to X$. Como antes, se deduce que $X = 0$ y luego $r = 0$, lo que prueba, a su vez, que $X(t) \to 0$.

Como el lector atento habrá observado, lo anterior todavía no alcanza para garantizar la estabilidad asintótica del origen, en principio por dos motivos. Por un lado, hemos probado la convergencia al origen para las soluciones 'que se mantienen dentro de U', pero nada asegura que las soluciones con dato inicial en U no se puedan escapar. Y, por otra parte, tampoco hemos probado la estabilidad. Precisamente, ocuparnos de este último detalle nos resuelve los dos problemas a la vez, ya que entonces podemos fijar $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) \subset U$ y $\delta \leq \varepsilon$ tal que la solución se mantiene en $B_\varepsilon(0)$ cuando el dato inicial se encuentra en $B_\delta(0)$ y, en consecuencia, converge al origen.

Para ver la estabilidad, consideremos $\varepsilon > 0$ y, como $V \neq 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, podemos fijar $\eta > 0$ tal que $V(X) > \eta$ para todo X con $\|X\| = \varepsilon$. Pero además $V(0) = 0$, así que también podemos fijar $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $V(X) < \eta$ para todo $X \in B_\delta(0)$. Veamos que las soluciones con dato inicial de norma menor que δ se mantienen siempre dentro del conjunto

$$A := \{X \in \mathbb{R}^n : \|X\| < \varepsilon, V(X) < \eta\},$$

que obviamente es un entorno abierto del origen. En efecto, si X es una solución tal que $\|X(0)\| < \delta$, vale también que $X(0) \in A$. Supongamos que $X(t)$ toca ∂A por primera vez en cierto $t_0 > 0$, entonces por la elección de η se deduce que $0 < \|X(t_0)\| < \varepsilon$ y, en consecuencia, $V(X(t_0)) = \eta$. En particular, esto implica que $(V \circ X)'(t_0) \geq 0$, es decir:

$$0 \leq \langle \nabla V(X(t_0)), X'(t_0) \rangle \leq \langle \nabla V(X(t_0)), f(X(t_0)) \rangle,$$

lo que es absurdo.

A fin de generalizar las ideas previas para una ecuación con retardo cabe mencionar que, en realidad, la definición habitual de V involucra directamente el sistema dinámico y es un poco más general, pues no requiere en principio la diferenciabilidad de V. Lo que suele pedirse es que $\dot{V}(X) < 0$ para $X \neq 0$, donde

$$\dot{V}(X) := \frac{\partial}{\partial t} V(X(t)).$$

Esto da por sobreentendido que X es una solución y se puede interpretar de manera un poco más 'prolija' empleando el flujo. En realidad, como se trata de un sistema autónomo alcanza con suponer que X es un estado inicial, entonces lo anterior se traduce directamente como

$$\dot{V}(X) := \frac{\partial}{\partial t} V(\Phi(t, X))|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{V(\Phi(h, X)) - V(X)}{h}$$

pues $\Phi(0, X) = X$.[1]

Esto motiva la siguiente definición para un sistema $X'(t) = F(X_t)$, con F es localmente Lipschitz tal que $F(0) = 0$ (entendiendo, como siempre, que $0 = 0$...

[1]Si se quiere generalizar aun más, el límite puede reemplazarse por límite superior.

donde el primer cero -o el segundo, si se prefiere- denota la función nula). Como es de esperar, la función de Liapunov no será ahora una función, sino una funcional definida sobre un abierto U del espacio $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. Y además ahora el sistema no es dinámico sino semi, de modo que, dada $V : \overline{U} \to \mathbb{R}$ continua y $\phi \in U$ definimos

$$\dot{V}(\phi) := \lim_{h \to 0^+} \frac{V(\Phi(h, \phi)) - V(\phi)}{h}$$

siempre que el límite exista. En particular, vale trivialmente $\dot{V}(0) = 0$. La idea intuitiva es que si $\dot{V}(\phi) < 0$ para toda $\phi \neq 0$, entonces 0 es atractor para todas las soluciones que comienzan en U. En realidad, vamos a ver un resultado un poco más general, aunque vamos a necesitar dos cosas:

1. Pedir que F sea compacta.

2. Esperar a la próxima clase.