Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 12, versión preliminar. Críticas bienvenidas

En esta clase vamos a seguir estudiando algunas propiedades (semi)dinámicas del sistema autónomo

$$X'(t) = F(X_t)$$

con F localmente Lipschitz. Recordemos, para $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ continua denotamos $X(t, \phi)$ la única solución con condición inicial ϕ, y $\Phi(t, \phi) = X_t(\phi)$ el estado del sistema a tiempo t.

Veamos, en primer lugar, un caso particular de los sistemas *monótonos*, en los cuales el espacio de estados E es un conjunto ordenado (es decir, tiene definida una relación $\leq$ reflexiva, antisimétrica y transitiva) y el (semi)flujo preserva el orden:

$$X \leq Y \Rightarrow \Phi(t, X) \leq \Phi(t, Y) \qquad \text{para todo } t.$$

Si E es métrico, se pide que el orden sea compatible con la métrica), es decir:

$$X_n \to X, Y_n \to Y, X_n \leq Y_n \Rightarrow X \leq Y.$$

Finalmente, si E es normado se pide también que el orden sea compatible con la estructura de espacio vectorial:

$$X \leq Y \Rightarrow cX + Z \leq cY + Z \qquad \forall\, c \geq 0, Z \in E.$$

En este último caso el orden viene inducido por un *cono cerrado*, vale decir, un conjunto cerrado $K \subset E$ tal que

1. $K + K \subset K$.
2. $K \cap -K = \{0\}$.
3. K es convexo.

En efecto, si $(E, \leq)$ es un espacio normado ordenado, entonces se puede definir el cono positivo $K := \{X \in E : X \geq 0\}$; recíprocamente, si K es un cono de un espacio normado E, la relación

$$X \leq Y \Leftrightarrow Y - X \geq 0$$

define un orden compatible. Por supuesto, en el caso de $E = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ se tiene el orden compatible usual

$$\phi \leq \psi \text{ sii } \phi(t) \leq \psi(t) \text{ para todo } t.$$

Para funciones vectoriales, lo usual es considerar además el orden coordenada a coordenada, pero nos limitaremos aquí a considerar el caso escalar.

Un ejemplo típico de sistema semidinámico monótono discreto está dado por las iteraciones de una cierta función continua $T : E \to E$ creciente, vale decir, que cumple: $X \leq Y \Rightarrow T(X) \leq T(Y)$. En tal caso, existe un método que permite comprobar la existencia de un punto fijo de T por el llamado *método de super y subsoluciones*. Cuando $E = \mathbb{R}$ el método no es otra cosa que una versión del teorema de Bolzano: supongamos que existen $\alpha < \beta$ tales que

$$T(\alpha) \geq \alpha, \qquad T(\beta) \leq \beta,$$

entonces T tiene al menos un punto fijo en el intervalo $[\alpha, \beta]$. En efecto, basta considerar la función continua $f(x) := x - T(x)$, que verifica $f(\alpha) \leq 0 \leq f(\beta)$ y en consecuencia se anula. Esto no es ninguna novedad, aunque desde el punto de vista dinámico podemos analizar lo que ocurre al calcular la órbita positiva $\{T^n(x) : n \geq 0\}$ de cualquier $x \in [\alpha, \beta]$. Si x es un punto fijo, entonces $O_+(x) = \{x\}$; en caso contrario, observemos que de todas formas $T(x) \in [\alpha, \beta]$, es decir, el intervalo $[\alpha, \beta]$ es invariante. Esto se debe simplemente al hecho de que, como $\alpha \leq x \leq \beta$, entonces

$$\alpha \leq T(\alpha) \leq T(x) \leq T(\beta) \leq \beta.$$

Esto vuelve a mostrar, por si no estábamos seguros, que T tiene un punto fijo (esta vez por el teorema de Brouwer). Pero además permite probar que las órbitas son monótonas: si por ejemplo $T(x) < x$ entonces $T^{n+1}(x) \leq T^n(x)$ para todo n. Luego, $T^n(x)$ converge necesariamente a un punto fijo x_f de T. Para dar una muestra de nuestros múltiples recursos expresivos, podemos decirlo de otra forma: $\omega(x) = \{x_f\}$. Lo mismo ocurre si $T(x) > x$, en ese caso $T^n(x)$ converge en forma creciente a un punto fijo.

Por supuesto, cuando trabajamos en espacios más generales la vida deja de ser tan sencilla (por más que siga siendo una vida monótona). Entonces conviene entender mejor cuáles fueron los pasos que nos llevaron, en el ejemplo previo, a tan rotundo éxito. La situación es la siguiente: tenemos un espacio normado E provisto de un orden compatible, una función $T : E \to E$ continua y creciente y ciertos $\alpha \leq \beta$ tales que $\alpha \leq T(\alpha)$ y $\beta \geq T(\beta)$. Entonces es cierto que el intervalo $[\alpha, \beta]$ formado por los elementos $x \in E$ tales que $\alpha \leq x \leq \beta$ es invariante aunque, claro, eso no alcanza para asegurar la existencia de un punto fijo. Y tampoco vale, como dijimos antes, que si $T(x) \neq x$ entonces es mayor o menor que x, ya que el orden no es total. Y pedir que lo sea es demasiado restrictivo: en particular, no vale el espacio $C([-\tau, 0])$ que -no es inoportuno recordarlo- es el que nos interesa. Así que en general no va a ser tan fácil calcular la órbita de cualquier x. Pero, ¿qué ocurre si empezamos en α o β? En tal caso, la monotonía se puede probar igual que antes:

$$\alpha \leq T(\alpha) \leq T^2(\alpha) \leq \cdots \leq \beta$$

$$\beta \geq T(\beta) \geq T^2(\beta) \geq \cdots \geq \alpha.$$

Si pudiéramos asegurar que estas sucesiones convergen, entonces estaríamos hechos: por la continuidad de T, los respectivos límites son puntos fijos. Sin embargo, las sucesiones acotadas no tienen por qué ser convergentes... y la cosa es incluso peor: ¡no sabemos si las anteriores sucesiones son acotadas!

Esto último se debe al hecho de que una 'cota' en el sentido del orden no implica necesariamente una cota en el sentido de la norma. Para poder afirmar algo así no basta con la compatibilidad; en consecuencia, debemos pedir una condición extra:

Definición 0.1 *El orden $\leq$ se dice normal sii existe una constante $c > 0$ tal que*

$$0 \leq X \leq Y \Rightarrow \|X\| \leq c\|Y\|.$$

Por ejemplo, para $E = C([-\tau, 0])$ la condición se cumple, con $c = 1$: en efecto, si $0 \leq \phi(t) \leq \psi(t)$ para todo t, entonces $\|\phi\|_\infty \leq \|\psi\|_\infty$.

Si asumimos normalidad (no la nuestra, sino la del orden), entonces es fácil probar que las sucesiones anteriores están acotadas. Por ejemplo, a partir de las desigualdades

$$\alpha \leq T^n(\alpha) \leq \beta$$

deducimos que

$$0 \leq T^n(\alpha) - \alpha \leq \beta - \alpha$$

y entonces $\|T^n(\alpha) - \alpha\| \leq c\|\beta - \alpha\|$, lo que a su vez implica: $\|T^n(\alpha)\| \leq \|\alpha\| + c\|\beta - \alpha\|$.

Tenemos entonces sucesiones acotadas; ¿qué hacemos para garantizar la convergencia? Hmmmm... todo parece indicar que una buena hipótesis es que T sea compacto. Al menos eso garantiza que hay puntos fijos pues, dicho sea de paso, el intervalo $[\alpha, \beta]$ es convexo: si $X, Y \in [\alpha, \beta]$ y $s \in [0, 1]$ entonces

$$s\alpha \leq sX \leq s\beta, \qquad (1-s)\alpha \leq (1-s)Y \leq (1-s)\beta$$

y sumando vale:

$$\alpha \leq sX + (1-s)Y \leq \beta.$$

[1] Como $T([\alpha, \beta]) \subset [\alpha, \beta]$, se aplica el teorema de Schauder. Pero volviendo a nuestras sucesiones, la tarea no está terminada, porque la compacidad solo nos garantiza, en principio, que existe alguna subsucesión convergente. Pero la monotonía alcanza para 'ensanguchar' (expresión proveniente del vocablo 'sanguchito') los restantes términos de la siguiente manera:

Lema 0.2 *Si $\{X_n\}$ es monótona y existe una subsucesión $\{X_{n_j}\}$ que converge a cierta X, entonces $X_n \to X$.*

<u>*Demostración*</u>: Supongamos que la sucesión es creciente, entonces escribiendo

$$X = X_{n_j} + \sum_{k=j}^{\infty} (X_{n_{k+1}} - X_{n_k})$$

[1] Más directamente, basta observar que $[0, \beta - \alpha] \subset K$.

deducimos (pues el cono positivo K es cerrado) que $X \geq X_{n_j}$. Ahora, para cada n definimos $j(n)$ como el único tal que $n_{j(n)} \leq n < n_{j(n)+1}$. Luego

$$0 \leq X_n - X_{n_{j(n)}} \leq X_{n_{j(n+1)}} - X_{n_{j(n)}} \to 0.$$

Usando otra vez la normalidad, concluimos que $X_n - X_{n_{j(n)}} \to 0$ y, en definitiva: $X_n \to X$.

Observación 0.1 *Cabe aclarar que la anterior condición de compacidad es suficiente pero no indispensable: por ejemplo, el método también funciona en algunos casos de problemas casi-periódicos, en donde los operadores asociados no son compactos.*

A modo de ejemplo, consideremos la ecuación

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \tag{1}$$

con f continua y T-periódica en t. Como dijimos hace algunas clases, el problema de encontrar soluciones T-periódicas es resonante, pues el operador $x \mapsto x'$ tiene núcleo no trivial (las funciones constantes). Una manera de evitar esto es sumar un término $ax(t)$ de ambos lados, por ejemplo con a una constante positiva. En tal caso, el siguiente lema, interpretado adecuadamente, prueba que el operador inverso de $Lx := x' + ax$ es creciente.

Lema 0.3 *Sea $a > 0$ y sea x una función T-periódica de clase C^1 tal que $x'(t) + ax(t) \geq 0$ para todo t. Entonces $x \geq 0$.*

<u>*Demostración*</u>: Como x es periódica, alcanza su mínimo absoluto en cierto valor t_0. Entonces $ax(t_0) \geq 0$, lo que prueba que $x \geq 0$. $\square$

A partir de este lema, podemos transformar la ecuación anterior en un problema de punto fijo y encontrar condiciones para que el operador involucrado sea monótono. En efecto, al igual que algunas clases atrás, para $y \in C_T$ fija definimos $x := \mathcal{T}y$ como la única solución T-periódica de

$$x'(t) + ax(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)) + ay(t)$$

es decir,

$$x = L^{-1}N(y)$$

con L como antes y $N : C_T \to C_T$ dado por $N(y)(t) := f(t, y(t), y(t-\tau)) + ay(t)$. Buscamos un punto fijo de $\mathcal{T} = L^{-1}N$, que (como vimos, aunque quizás dicho de otra forma) resulta compacto.

Llegó la hora de preguntarse por la monotonía: ¿qué quiere decir que $\mathcal{T}$ sea creciente? Como L es lineal, el lema previo dice que si $\phi \leq \psi$ entonces $L^{-1}(\phi) \leq L^{-1}(\psi)$; luego, bastará con pedir que el operador N (por no-lineal, pero también por Nemitskii) sea creciente, es decir: si $y(t) \leq z(t)$ para todo t, entonces $f(t, y(t), y(t-\tau)) + ay(t) \leq f(t, z(t), z(t-\tau)) + az(t)$ para todo t. Esto es, claramente, mucho pedir... aunque una idea 'salvadora' viene en nuestra ayuda: en realidad, no hace falta pedir eso en todo el espacio C_T, sino solamente en el conjunto $[\alpha, \beta]$, donde $\alpha \leq \beta$ son, respectivamente, una sub y una supersolución, es decir,

$$\alpha \leq \mathcal{T}(\alpha), \qquad \beta \geq \mathcal{T}(\beta).$$

Una vez más por el lema, esto significa, simplemente, que α y β son T-periódicas y verifican

$$L\alpha \leq N(\alpha) \qquad L\beta \geq N(\beta),$$

es decir:

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t), \alpha(t-\tau)), \qquad \beta'(t) \geq f(t, \beta(t), \beta(t-\tau))$$

para todo t. Notemos que a desapareció porque se cancela, así que tenemos libertad de elegirlo como mejor nos convenga. Entonces, si suponemos por simplicidad que f es de clase C^1 en la segunda variable, podemos pensar que eligiendo $a > 0$ suficientemente grande la función $x \mapsto f(t, x, y) + ax$ es creciente para t, y fijos. Esto se debe a que solo nos interesa mirar los valores (t, x, y) que pertenecen al conjunto

$$C := \{0 \leq t \leq T,\, \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\, \alpha(t-\tau) \leq y \leq \beta(t-\tau)\} \subset \mathbb{R}^3$$

que (buena noticia) es compacto. En consecuencia, alcanza con tomar a de modo tal que $a \geq -\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y)$ para $(t, x, y) \in C$. Para lograr crecimiento respecto de la tercera variable, no parece haber más remedio que pedirlo directamente:

$$y \leq z \Rightarrow f(t, x, y) \leq f(t, x, z) \quad \forall\, t, x.$$

Bajo estas condiciones, la existencia de un par ordenado (α, β) consistente en una sub y una super solución periódicas garantiza la existencia de una solución periódica del problema.

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x'(t) = a(t)x(t)^3 + b(t)x(t-\tau)$$

con $a, b \in C_T$ tales que $b(t) > 0 > a(t)$ para todo t. Si elegimos $\alpha := (\inf b)^{1/2} > 0$, vale que

$$\alpha' = 0 \leq \alpha(a(t)\alpha^2 + b(t)) = a(t)\alpha^3 + b(t)\alpha$$

para todo t. Del mismo modo, para $\beta > \alpha$ constante tal que $\beta^2 \geq -\frac{b(t)}{a(t)}$ para todo t resulta

$$\beta' = 0 \geq \beta(a(t)\beta^2 + b(t)) = a(t)\beta^3 + b(t)\beta$$

para todo t. En este caso, $f(t, x, y) = a(t)x^3 + b(t)y$; como $b > 0$, se cumple que f es creciente respecto de la variable y. Esto prueba que el problema tiene al menos una solución T-periódica positiva (específicamente, tal que $\alpha < x(t) < \beta$ para todo t).

$\square$

Cabe mencionar que el método también sirve si las desigualdades para α y β valen al revés, es decir

$$\alpha'(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t-\tau)), \qquad \beta'(t) \leq f(t, \beta(t), \beta'(t-\tau))$$

pidiendo ahora que f sea decreciente en la tercera coordenada. Esto se debe a que si $a > 0$ entonces se ve, como antes, que el operador $Lx : x' - ax$ es decreciente y, eligiendo $a \gg 0$ el operador dado por $Nx(t) := f(t, x(t), x(t-\tau)) - ax(t)$ es también decreciente (ver práctica 4).

Más allá del problema específico de existencia de soluciones periódicas, veremos a continuación que la condición de monotonía permite estudiar algunos aspectos generales de la dinámica de la ecuación (1). Por simplicidad, supondremos que se trata de un problema autónomo, con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 creciente en su segunda coordenada, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geq 0$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La primera propiedad es que el semiflujo Φ es creciente en su segunda coordenada:

Proposición 0.1 *Sea f como antes y supongamos $\phi \leq \psi$. Entonces para todo $t \geq 0$ vale $x_t(\phi) \leq x_t(\psi)$.*

Demostración: De acuerdo con el método de pasos, alcanza con probar que

$$x(t, \phi) \leq x(t, \psi)$$

para todo $t \in [0, \tau]$. Si llamamos $g(t, x) := f(t, x, \phi(t)) \leq f(t, x, \psi(t))$ entonces para $x(t) := x(t\phi)$, $y(t) := x(t, \psi)$ resulta

$$x'(t) = g(t, x(t)), \qquad y'(t) \geq g(t, y(t))$$

y además

$$x(0) \leq y(0).$$

Supongamos en primer lugar que las anteriores desigualdades son estrictas y que ambas funciones se encuentran por primera vez en cierto valor t_0, entonces $x'(t_0) \geq y'(t_0)$. Pero

$$x'(t_0) = g(t_0, x(t_0)) = g(t_0, y(t_0)) < y'(t_0),$$

lo que es absurdo. Esto prueba que $x(t) < y(t)$ para todo t. Para el caso general, sea $h(t) := y'(t) - g(t, y(t)) \geq 0$ y llamemos y_n a la única solución del problema

$$z'(t) = g(t, z(t)) + h(t) + \frac{1}{n}$$

con condición inicial $z(0) = y(0) + \frac{1}{n}$. Como $y_n'(t) > g(t, y_n(t))$, se deduce, para todo t, que $y_n(t) > x(t)$. Por continuidad, $y_n(t) \to y(t)$, de modo que $y(t) \geq x(t)$ para todo t.

$\square$

Esto permite comparar la dinámica de (1) con la de la ecuación diferencial $x'(t) = f(x(t), x(t))$. Comencemos por el siguiente resultado válido para los 'sub/super-equilibrios':

Proposición 0.2 *Sea f como antes y $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a,a) \geq 0$. Si $\phi \geq a$, entonces*

1. $x(t, \phi) \geq x(t, a) \geq a$ *para todo* $t \geq 0$.
2. $x(t, a)$ *es creciente y, si está acotada, converge a un equilibrio.*

Conclusiones análogas (con cambios obvios) valen si $f(a,a) \leq 0$.

Demostración: La desigualdad $x(t, \phi) \geq x(t, a)$ es consecuencia directa de la proposición anterior. Por otro lado, si $x = x(\cdot, a)$ en $[0, \tau]$ vale $x'(t) = f(x(t), a)$ y $a' = 0 \leq f(a, a)$, asi que se deduce, de modo similar al de la proposición previa, que $x(t) \geq a$. Repitiendo el procedimiento se ve que la desigualdad sigue valiendo para todo t. Finalmente, podemos usar las propiedades del flujo para escribir todo de una manera elegante: como $a \leq x_t$ para todo $t \geq 0$, entonces

$$a \leq x_s(a) \leq x_{s+t}(a)$$

para todo $s \geq 0$. Esto prueba que la función $t \mapsto x_t$ es creciente. $\square$

¿Cómo se aplica todo esto? ¡No se pierda la próxima clase!