Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 11, versión preliminar. Para críticas, llame al 0800-delay... y espere a ser atendido

En la clase previa vimos que si Φ es un sistema semidinámico continuo autónomo entonces el conjunto ω-límite de cualquier $X \in E$ es cerrado y positivamente invariante. Además, si la órbita de X es precompacta se verifica que $\omega(X)$ es no vacío, compacto, invariante, conexo y además vale: $\Phi(t, X) \to \omega(X)$ para $t \to +\infty$. En particular, si Φ es el (semi)flujo asociado a una ecuación con retardo

$$X'(t) = F(X_t)$$

con F localmente Lipschitz, podemos escribir

$$\Phi(t, \phi) = X_t(\phi)$$

y entonces el ω-límite de cierta $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ esta dado por

$$\omega(\phi) = \{\psi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) : \|X_{t_n}(\phi) - \psi\|_\infty \to 0 \, \text{para ciertos } \ t_n \to +\infty\}.$$

Como vimos, $\omega(\phi)$ puede ser vacío, por más que (a diferencia del caso sin retardo) la órbita $\mathcal{O}_+(\phi)$ sea acotada. Por eso, la condición habitual es que F sea un operador compacto; en tal caso se puede asegurar que si $\mathcal{O}_+(\phi)$ es acotado entonces su clausura es compacta y, en consecuencia, $\omega(\phi) \neq \emptyset$. En efecto, el resultado es bastante claro a partir del teorema de Arzelá-Ascoli, pues si existe una constante M tal que $\|X_t(\phi)\|_\infty \leq M$ para todo t, entonces existe C tal que vale, para $X = X(\cdot, \phi)$, que $\|X'(t)\| = \|F(X_t)\| \leq C$ para todo t. Esto dice que el conjunto $\mathcal{O}_+(\phi)$ es equicontinuo y entonces su clausura es compacta. Aunque sea evidente, vale la pena aclarar que $\mathcal{O}_+(\phi)$ es acotada si y solo si el conjunto $\{X(t, \phi) : t \geq 0\}$ es acotado en $\mathbb{R}^n$. Otra propiedad inmediata es que si una solución converge a cierto $c \in \mathbb{R}^n$, su límite es necesariamente una solución constante. Si ignoramos el isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y el subespacio de funciones constantes de $C([-\tau, 0, \mathbb{R}^n)$, podemos decir directamente que c es un punto de equilibrio:

Proposición 0.1 *Si $X(t, \phi) \to c$ para $t \to \infty$ entonces $\mathcal{O}_+(c) = \{c\}$.*

<u>*Demostración*</u>: Dado $\varepsilon > 0$ fijamos t_0 tal que $\|X(t, \phi) - c\| < \varepsilon$ para todo $t > t_0$; luego, $\|X_t - c\|_\infty < \varepsilon$ para todo $t > t_0 + \tau$. Se deduce que $\Phi(t, \phi) \to c$ para

$t \to +\infty$ y entonces $\omega(\phi) = \{c\}$. Pero sabemos que $\omega(\phi)$ es invariante, así que $\Phi(t, c) = c$ para todo t. Esto prueba que c es un equilibrio. $\square$

El ω límite sirve, entre otras cosas, para estudiar la estabilidad de un equilibrio: es fácil ver que e es (localmente) asintóticamente estable si existe un entorno $U \subset C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{O}_+(\phi)$ está acotada y $\omega(\phi) = \{e\}$ para toda $\phi \in U$. En caso de que U sea todo el espacio, e resulta asintóticamente estable, es decir, un atractor global. En efecto, si e es asintóticamente estable existe U tal que para todo $\phi \in U$ se cumple que $X(t, \phi) \to e$ para $t \to \infty$ y esto, como vimos, implica que $\omega(\phi) = \{e\}$. Recíprocamente, si $\omega(\phi) = \{e\}$ entonces existe $t_n \to +\infty$ tal que $\|X_{t_n}(\phi) - e\|_\infty \to 0$. Supongamos que también existe $s_n \to +\infty$ tal que $X(s_n, \phi) \not\to e$, luego $\|X_{s_n}(\phi) - e\|_\infty \geq \varepsilon > 0$ para cierto $\varepsilon > 0$. Luego, tomando una subsucesión, podemos suponer que $X_{s_n}(\phi)$ converge a cierta $\psi \neq e$. Por definición, $\psi \in \omega(e)$, lo que es absurdo.

A modo de ejemplo, consideremos la ecuación logística

$$N'(t) = N(t)(1 - N(t - \tau)),$$

cuyos equilibrios son 0 y 1. Si $N_0 = \phi \geq 0$, es inmediato verificar que la solución está definida para todo $t \geq -\tau$ y se mantiene mayor o igual que 0. En efecto, observemos en primer lugar que si N está definida hasta cierto $t_0 \geq 0$ y $N(t_0) = 0$, entonces por unicidad vale $N(t, \phi) = 0$ para todo $t \geq t_0$. Este es otro ejemplo de soluciones que se 'unifican' a partir de cierto t_0... aunque, hilando más fino, podemos ver que esto solo puede ocurrir si $t_0 = 0$ (es decir, $\phi(0) = 0$). Esto sale directamente integrando la ecuación a partir de 0:

$$N(t) = N(0)e^{\int_0^t (1 - N(s-\tau))\, ds}. \tag{1}$$

Por otra parte, esta misma idea permite mostrar, según el método de pasos, que la solución está globalmente definida: una vez que la conocemos para $t \leq n\tau$, la fórmula

$$N(t) = N(n\tau)e^{\int_{n\tau}^t (1 - N(s-\tau))\, ds}$$

la extiende hasta $(n + 1)\tau$ y así sucesivamente. Más aun, el comportamiento asintótico de la solución se puede analizar a partir de las siguientes observaciones elementales:

1. Si $N \geq 1$ a partir de cierto t_0, entonces $N' \leq 0$ a partir de $t_0 + \tau$ y luego converge, para $t \to +\infty$, a cierto límite. Como vimos, dicho límite es un punto de equilibrio, así que $N(t) \searrow 1$ para $t \to +\infty$ (obviamente, podemos afirmar que decrece recién a partir de $t_0 + \tau$).

2. Si $N \leq 1$ a partir de cierto t_0, entonces $N' \geq 0$ a partir de $t_0 + \tau$. Entonces hay dos opciones:

   - $\phi(0) = 0$ y $N(t) = 0$ para $t \geq 0$.
   - $\phi(0) > 0$ y $N(t) \nearrow 1$ para $t \to +\infty$.

3. Si no ocurre ninguna de las situaciones anteriores, N oscila alrededor de 1. Supongamos que $N(t_1) = N(t_2) = 1$ y $N > 1$ en (t_1, t_2), entonces N alcanza su máximo en dicho intervalo en cierto valor t_{max}. Como $N'(t_{max}) = 0$, se deduce que $N(t_{\max} - \tau) = 1$ y por lo tanto $t_{max} - \tau \leq t_1$. Reescribiendo ahora la fórmula (1) a partir de t_1, obtenemos

$$N(t_{max}) = N(t_1)e^{\int_{t_1}^{t_{max}} (1-N(s-\tau))\, ds} \leq e^{t_{max}-t_1} \leq e^{\tau}.$$

   Esto prueba que $N(t) \leq e^{\tau}$ para todo $t \geq t_1$.

En definitiva, concluimos que para cualquier $\phi \geq 0$ la órbita $\mathcal{O}_+(\phi)$ es acotada y $\omega(\phi)$ es no vacío.

Lo visto hasta ahora alcanza sacar conclusiones respecto del equilibrio trivial: si $\phi(0) = 0$ entonces $N = 0$ a partir de $t = 0$ y obviamente $\omega(\phi) = \{0\}$. Pero, en cambio, si $\phi(0) > 0$ el segundo de los casos anteriores nos dice que $N(t) \not\to 0$ para $t \to +\infty$, así que 0 no puede ser un equilibrio asintóticamente estable. Esto es consistente con el hecho de que la linealización en 0 da por resultado la ecuación $N'(t) = N(t)$, para la cual el 0 es inestable. En rigor, 0 no puede ser punto límite de ninguna ϕ tal que $\phi(0) > 0$ y, más aun, existe una constante $c > 0$ independiente de ϕ tal que

$$\liminf_{t\to+\infty} N(t, \phi) \geq c.$$

Para ver esto, solo hay que encontrar una cota inferior para aquellas soluciones que oscilan alrededor de 1. Como antes, si para $t_1 < t_2$ vale $N < 1$ en (t_1, t_2) y $N(t_1) = N(t_2) = 1$ entonces el valor mínimo en dicho intervalo se alcanza en cierto $t_{min} \leq t_1 + \tau$ y, agrandando t_1 si hace falta,

$$N(t_{min}) = N(t_1)e^{\int_{t_1}^{t_{min}} (1-N(s-\tau))\, ds} \geq e^{(t_{min}-t_1)(1-e^{\tau})} \geq e^{\tau(1-e^{\tau})}.$$

Sin embargo, el análisis del otro punto de equilibrio es más delicado. Si ocurre alguno de los primeros dos casos, es claro que $\omega(\phi) = \{1\}$, pero no es fácil ver lo que ocurre con aquellas soluciones que oscilan alrededor de 1. La ecuación linealizada es ahora

$$u'(t) = -u(t-\tau)$$

que -como sabemos- es asintóticamente estable para $\tau < \frac{\pi}{2}$ e inestable para $\tau > \frac{\pi}{2}$. En consecuencia, para $\tau < \frac{\pi}{2}$ sabemos que hay estabilidad asintótica... pero solamente local. Por supuesto, no se puede probar que 1 es un atractor global, ya que existe otro equilibrio, aunque en el caso sin retardo es inmediato verificar que todas las soluciones tales que $N(0) > 0$ convergen a 1. De esta forma, es razonable pensar que para τ chico esta propiedad se mantiene, es decir, que 1 es atractor para todas las soluciones con condición inicial $\phi \geq 0$ tal que $\phi(0) > 0$. En efecto, observemos en primer lugar que las cotas anteriores pueden mejorarse sucesivamente: si N oscila alrededor del 1 y ya sabemos que vale $\alpha < N(t) < \beta$ a partir de cierto valor s, entonces tomando $t_1 < t_2$ mayores que $s + \tau$ y t_{max}, t_{min} como antes se deduce que

$$N(t_{max}) \leq e^{\int_{t_1}^{t_{max}} (1-N(s-\tau))\, ds} \leq e^{\tau(1-\alpha)}$$

$$N(t_{min}) \leq e^{\int_{t_1}^{t_{min}} (1-N(s-\tau))\, ds} \geq e^{\tau(1-\beta)}.$$

Si llamamos $g(x) := e^{\tau(1-x)}$, las primeras cotas que obtuvimos dicen que existe s_1 tal que

$$e^{\tau(1-e^{\tau})} = g(g(0)) < N(t) < e^{\tau} = g(0)$$

para $t > s_1$. Inductivamente, se ve que existe s_n tal que

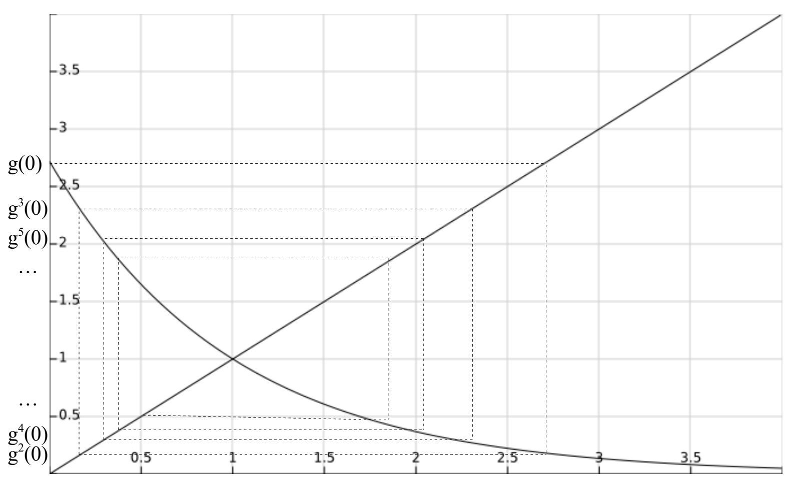
$$g^{2n}(0) < N(t) < g^{2n-1}(0) \tag{2}$$

para $t > s_n$. En resumen, tenemos: ¡un sistema dinámico discreto! La función g es decreciente y positiva, luego $g^2 = g \circ g$ es creciente y

$$0 < g^2(0) < g^4(0) < \ldots$$

$$g(0) > g^3(0) > g^5(0) > \ldots$$

En consecuencia, las sucesiones $g^{2n-1}(0)$ y $g^{2n}(0)$ convergen respectivamente a ciertos límites $L \geq g(L)$. Es fácil ver que se trata de puntos fijos de g^2: por ejemplo, a partir del límite $g^{2n-1}(0) \to L$ obtenemos $g^{2n}(0) \to g(L)$ y $g^{2n+1}(0) \to g(g(L))$, de donde se deduce $g^2(L) = L$ y $g^2(g(L)) = g(L)$.



Veamos que si $\tau \leq 1$ entonces el único punto fijo de g^2 es 1, lo que prueba que $N(t) \to 1$ para $t \to +\infty$. En efecto, $x > 0$ es punto fijo de g^2 si y solo si $g(g(x)) = x$ o, equivalentemente, $g(x) = g^{-1}(x)$, es decir:

$$e^{\tau(1-x)} = 1 - \frac{\ln x}{\tau}.$$

Consideremos la función $\varphi(x) := e^{\tau(1-x)} + \frac{\ln x}{\tau}$ y observemos que $\varphi(0^+) = -\infty$, $\varphi(+\infty) = +\infty$. Además, $\varphi'(x) = 0$ si y solo si

$$\tau x e^{-\tau x} = e^{-\tau}.$$

El término de la izquierda es siempre menor o igual que $\frac{1}{e}$, de modo que φ es estrictamente creciente para $\tau \leq 1$. En consecuencia, g no tiene otros puntos fijos además de $x = 1$.

Es claro que la cuenta anterior con la g no permite mejorar el valor de τ, ya que si $\tau > 1$ se verifica que $\varphi'(1) < 0$ y entonces φ toma el valor 1 al menos tres veces. Sin embargo, acotando con más cuidado los anteriores valores $N(t_{max})$ y $N(t_{min})$, se puede probar que la restricción que impusimos para τ es excesiva. En rigor, el resultado vale para $\tau < \frac{3}{2}$ y se ha conjeturado que se puede extender 'un poquito más', para τ menor que el valor $\frac{\pi}{2}$ que surge de la linealización.