

# Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 10, versión preliminar. Las críticas son indispensables

A diferencia de todas las clases anteriores (salvo la primera), esta no empieza con un ‘como vimos en la clase previa’ ya que vamos a comenzar con ‘tema nuevo’: específicamente, algunas cuestiones ligadas a los sistemas dinámicos inducidos por ecuaciones con retardo. Aunque es difícil desarraigar ciertos hábitos, de modo que para motivar el tema mencionaremos (como vimos...) en primer lugar el flujo asociado a un sistema de ecuaciones ordinarias

$$X'(t) = f(t, X(t)),$$

en donde  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua y localmente Lipschitz en  $X$ . Para cada condición inicial  $(t_0, X_0)$  existe una única solución  $X$  definida en un entorno de  $t_0$ , lo que permite a su vez definir el flujo

$$\Phi(t, t_0, X_0) := X(t).$$

Sabemos que  $\Phi$  es una función continua definida en un conjunto  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  no muy fácil de determinar aunque obviamente vale

1.  $\Phi(t_0, t_0, X_0) = X_0$ .
2.  $\Phi(t, t_1, \Phi(t_1, t_0, X_0)) = \Phi(t, t_0, X_0)$ .

siempre que tenga sentido (es decir, siempre que los vectores involucrados se encuentren en  $D$ ). La segunda propiedad se desprende de la unicidad, pues la única solución que en  $t_1$  vale  $\Phi(t_1, t_0, X_0)$  es precisamente la misma que ‘evolucionó’ a partir del estado  $X_0$  que tenía a tiempo  $t_0$ . Esto parece un juego de palabras, pero surge simplemente de observar que si  $X$  es la solución que en  $t_0$  vale  $X_0$ , entonces la solución que en  $t_1$  vale  $\Phi(t_1, t_0, X_0) = X(t_1)$  necesariamente es la misma. Un caso especial es el de los sistemas autónomos, en los que  $f$  no depende explícitamente de  $t$  y se puede suponer siempre que  $t_0 = 0$  pues vale

$$\Phi(t, t_0, X_0) = \Phi(t - t_0, 0, X_0)$$

En efecto, si  $X$  es la solución con condición inicial  $X(t_0) = X_0$  entonces llamando  $Y(t) := X(t + t_0)$  se tiene que

$$Y'(t) = X'(t + t_0) = f(X(t + t_0)) = f(Y(t))$$

y además  $Y(0) = X(t_0) = X_0$ , por lo cual  $\Phi(t - t_0, 0, X_0) = Y(t - t_0) = X(t)$ . En tal caso, el flujo se puede escribir directamente como función de las variables  $t$  y  $X_0$ .

Una situación similar se presenta para los sistemas de ecuaciones con retardo aunque (¡como vimos!) los estados son ahora funciones en el espacio  $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ . Y, como también vimos, esta clase de sistemas se resuelve solamente hacia adelante. Esto va a motivar que nuestros sistemas, en vez de dinámicos, se llamen *semi-dinámicos*.

Ya estamos en condiciones de esbozar un panorama general más abstracto, con la idea intuitiva de que un sistema dinámico consiste en un conjunto  $E$  de estados y una regla  $\Phi$  que describe cómo cambian dichos estados con el tiempo (algunos autores agregan, al final de esta frase, la pregunta: ¿vivo?). El valor  $\Phi(t, t_0, X_0)$  indica cuál es, a tiempo  $t$ , el estado del sistema que en el tiempo (inicial)  $t_0$  tiene el estado  $X_0$ . Por simplicidad vamos a suponer que  $\Phi$  está definida para todo tiempo  $t$ , que puede ser discreto ( $t \in \mathbb{Z}$ ) o continuo ( $t \in \mathbb{R}$ ). Más en general, se puede asumir que  $t$  toma valores en un grupo.

Un sistema dinámico es entonces una función  $\Phi : S \times E \rightarrow E$  que cumple las anteriores condiciones 1 y 2, donde  $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  o  $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Cuando  $E$  es un espacio métrico, se pide además que  $\Phi$  sea una función continua. Finalmente, en el caso de los sistemas semidinámicos, se pide también que  $t \geq t_0$ , es decir, se reemplaza el conjunto  $S$  por (para decirlo de un modo rebuscadísimo) el epigrafo de su diagonal. En criollo, simplemente se trata del conjunto

$$\tilde{S} := \{(t, t_0) \times S : t \geq t_0\}.$$

Un sistema semidinámico discreto viene siempre determinado a partir de una familia  $F_n : E \rightarrow E$  de funciones y la regla evolutiva se puede escribir como una *ecuación en diferencias*:

$$X_{n+1} = F_n(X_n).$$

En otras palabras, la función  $F_n$  dice cuál va a ser el estado en el instante  $n + 1$  de un sistema que, en el instante  $n$ , se encuentra en el estado  $X_n$ . En el contexto de antes (para  $t = n$  y  $t_0 = k$ ), esto significa que

$$\Phi(n, k, X_k) = F_{n-1} \circ \dots \circ F_k(X_k).$$

La dependencia respecto de  $n$  expresa el hecho de que el sistema es no autónomo, pero si se trata siempre de una misma función  $F_n = F$ , entonces lo que se tiene son sencillamente iteraciones de  $F$ :

$$X_{n+1} = F(X_n)$$

$$\Phi(n, k, X) = \Phi(n - k, 0, X) = F^{n-k}(X).$$

Aquí se ve que el prefijo ‘semi’ es inevitable pues hay que pedir  $n \geq k$ . Salvo, claro está, que  $F$  sea biyectiva y entonces podemos tachar el ‘semi’ con la mayor de las tranquilidades.

Respecto de los sistemas semidinámicos continuos, obviamente nuestro ejemplo típico (por eso estamos hablando del tema) va a estar dado por una ecuación con retardo

$$X'(t) = F(t, X_t)$$

con  $F : \mathbb{R} \times C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y localmente Lipschitz. Por el momento, asumiremos que las soluciones están globalmente definidas. El conjunto de estados es  $E = C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$  y la función  $\Phi$  se define entonces para  $t \geq t_0$  como  $\Phi(t, t_0, \phi) = X_t$ , donde  $X$  es la solución cuyo estado a tiempo inicial  $t_0$  es  $\phi$ . Queda como ejercicio verificar que  $\Phi$  cumple con las dos condiciones antes enunciadas y además resulta continua (para esto hay que usar obviamente lo visto en las clases previas, cuando probamos la continuidad respecto de  $\phi$ ).

Motivados por esta idea, definimos lo que significa *solución* de un sistema dinámico abstracto:

**Definición 0.1** *Una solución de un sistema semidinámico continuo  $\Phi$  es una función  $s : I \rightarrow E$ , donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo no trivial, tal que para todos los valores  $t, t_0 \in I$  tales que  $t \geq t_0$  se cumple*

$$s(t) = \Phi(t, t_0, s(t_0)).$$

Por ejemplo, veamos que una solución es solución. Esto parece una tontería, pero en realidad hay que verificar que en nuestro ‘ejemplo típico’ las dos definiciones coinciden. En efecto, si  $X$  es solución de la ecuación definida en  $[A, +\infty)$ , podemos pensarla como la función de  $I := [A + \tau, +\infty)$  en  $C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$  dada por  $t \mapsto X_t$ . Si fijamos  $t_0 \in I$  y  $t \geq t_0$ , se tiene por definición que  $X_t = \Phi(t, t_0, X_{t_0})$ . Recíprocamente, si  $s$  es una solución, sabemos que  $\Phi(t, t_0, s(t_0))$  es el estado a tiempo  $t \geq t_0$  de la única solución  $X$  con condición inicial  $X_{t_0} = s(t_0)$  y, en consecuencia,  $X_t = s(t)$ .

Otro ejemplo evidente de solución, para un sistema cualquiera, es la trayectoria dada por  $s(t) = \Phi(t, t_0, X_0)$ , para cualquier  $X_0 \in E$  fijo. En efecto, por la primera condición para  $\Phi$  vale  $s(t_0) = X_0$  y la tautología (y la segunda condición) se encargan del resto.

Ya que hablamos de tautologías, veamos también un resultado más o menos esperable de unicidad, que dice que dos soluciones que coinciden en un punto son iguales. Esto refleja el hecho de que dos trayectorias no se pueden ‘cruzar’ en el espacio de estados.

**Proposición 0.1** *Sean  $s_1, s_2 : I \rightarrow E$  soluciones tales que  $s_1(t_0) = s_2(t_0)$  para cierto  $t_0 \in I$ . Entonces  $s_1 = s_2$ .*

Demostración: Por definición,

$$s_1(t) = \Phi(t, t_0, s_1(t_0)) = \Phi(t, t_0, s_2(t_0)) = s_2(t).$$

□

En lo que sigue nos veremos algunas propiedades básicas de los sistemas autónomos, que formalmente se definen como aquellos que cumplen

$$\Phi(t, t_0, X_0) = (t + A, t_0 + A, X_0)$$

para todo  $A$ . Lo que esto refleja, simplemente, es el hecho de que  $\Phi$  se puede pensar solamente como función de las variables  $t$  y  $X_0$  ya que, como antes,  $\Phi(t, t_0, X_0) = \Phi(t - t_0, 0, X_0)$ . Los sistemas autónomos quedan caracterizados por medio del siguiente resultado:

**Proposición 0.2**  $\Phi$  es autónomo si y solo si para toda  $s : I \rightarrow E$  solución y todo  $A$  vale que  $s(t + A)$  es solución en el intervalo  $I - A$ .

Demostración:  $\Rightarrow$ ) Sea  $s$  solución y  $v(t) := s(t + A)$ , entonces

$$\Phi(t, t_0, v(t_0)) = \Phi(t + A, t_0 + A, s(t_0 + A)) = s(t + A) = v(t),$$

de donde se concluye que  $v$  es solución.

$\Leftarrow$ ) Consideremos, para  $X \in E$  y  $A$  fijos, la función  $s(t) := \Phi(t, t_0 + A, X)$ . Si para cualquier  $t$  llamamos  $\tilde{t} := t + A$ , entonces  $s(\tilde{t}_0) = \Phi(\tilde{t}_0, t_0 + A, X) = \Phi(\tilde{t}_0, \tilde{t}_0, X) = X$  y luego

$$\Phi(\tilde{t}, \tilde{t}_0, s(\tilde{t}_0)) = \Phi(\tilde{t}, \tilde{t}_0, X) = s(\tilde{t}).$$

Esto prueba que  $s$  es solución, luego  $v(t) = s(t + A)$  es solución y, además  $v(t_0) = s(t_0 + A) = X$ . Luego

$$\Phi(t + A, t_0 + A, X) = s(t + A) = v(t) = \Phi(t, t_0, v(t_0)) = \Phi(t, t_0, X),$$

lo que prueba que  $\Phi$  es autónomo.  $\square$

A partir de ahora, nos ocuparemos únicamente de sistemas autónomos y los escribiremos directamente como funciones (continuas) de las variables  $t \geq 0$  y  $X \in E$ . Las condiciones anteriores se pueden reformular de la siguiente manera:

1.  $\Phi(0, X) = X$ .
2.  $\Phi(t, \Phi(t_0, X)) = \Phi(t + t_0, X)$ .

Como se trata de sistemas semidinámicos, las órbitas o trayectorias siempre van a ser positivas: dado  $X \in E$ , definimos

$$\mathcal{O}_+(X) = \{\Phi(t, X) : t \geq 0\}.$$

Un *punto de equilibrio* es simplemente una solución constante, vale decir: cierto  $e \in E$  tal que  $\Phi(t, e) = e$  para todo  $t \geq 0$ . Esto equivale a decir que  $\mathcal{O}_+(e) = \{e\}$ .

Pero hay otros casos de órbitas bastante especiales. Por ejemplo: sin llegar al extremo de ser constante, la órbita de un cierto  $X \in E$  puede acercarse asintóticamente a cierto límite  $Y$  (en ese caso: ¿será necesariamente un equilibrio?). Más en general, los puntos límite de  $X$  se definen como aquellos  $Y \in E$  para los cuales existe alguna sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $\Phi(t_n, X) \rightarrow Y$ . Esto ocurre obviamente con las trayectorias periódicas, que cuando no son constantes,

no convergen a ningún valor pero pasan infinitas veces por cada uno de sus puntos. El conjunto de puntos límite para un cierto  $X$  se llama  $\omega$ -límite, es decir:

$$\omega(X) := \{Y \in E : \Phi(t_n, X) \rightarrow Y \text{ para alguna sucesión } t_n \rightarrow +\infty\}.$$

De manera equivalente (fundamentalmente, para hacernos los cancheros) podemos escribir

$$\omega(X) = \bigcap_{s>0} \overline{\{\Phi(t, X) : t > s\}}.$$

Es claro que este conjunto puede ser vacío, como ocurre por ejemplo con aquellas trayectorias en  $\mathbb{R}^n$  que tienden a infinito. En cambio, si la trayectoria se mantiene acotada, es de esperar que haya puntos límites... por supuesto, bajo cierta condición de compacidad.

En el caso de una órbita periódica (para algún período  $T$ ), el  $\omega$ -límite coincide con  $\mathcal{O}_+(X)$ : en efecto, dado  $Y = \Phi(t_0, X)$  se verifica que  $Y = \Phi(t_n, X)$  para  $t_n := t_0 + nT \rightarrow +\infty$ . Para la inclusión recíproca, basta observar que  $\mathcal{O}_+(X)$  es compacto; luego, un punto  $Y \notin \mathcal{O}_+(X)$  se encuentra a distancia positiva de dicho conjunto y por consiguiente no puede ser punto límite. Esto implica (nuevamente la tautología), para  $Y \in \omega(X)$  vale que  $\Phi(t, Y) \in \omega(X)$  para todo  $t$ , lo cual dice que es ‘invariante’, en un sentido que vamos a definir con mayor precisión:

**Definición 0.2** Dado  $C \subset E$ , diremos que:

1.  $C$  es positivamente invariante si  $\mathcal{O}_+(X) \subset C$  para todo  $X \in C$ .
2.  $C$  es invariante si  $\Phi(t, C) = C$  para todo  $t \geq 0$ .

Claramente, la segunda definición es más restrictiva que la primera; más precisamente,  $C$  es invariante si y solo si es positivamente invariante y, además, la función  $\Phi(t, \cdot) : C \rightarrow C$  es suryectiva para todo  $t \geq 0$  (en otras palabras: para todo  $Y \in C$  y todo  $t \geq 0$  existe  $X \in C$  tal que  $\Phi(t, X) = Y$ ).

**Teorema 0.1** Dado  $X \in E$  se cumple:

1.  $\omega(X)$  es cerrado y positivamente invariante.
2. Si  $\overline{\mathcal{O}_+(X)}$  es compacto, entonces  $\omega(X)$  es no vacío, compacto, invariante y conexo. Además,

$$\text{dist}(\Phi(t, X), \omega(X)) \rightarrow 0 \quad \text{para } t \rightarrow +\infty.$$

Cabe aclarar que  $\text{dist}$  denota aquí la distancia de un punto a un conjunto. Formulada de otra manera, la última propiedad expresa el siguiente hecho: para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $T > 0$  tal que si  $t \geq T$  entonces existe  $Y \in \omega(X)$  de modo que  $d(\Phi(t, X), Y) < \varepsilon$  (ahora sí,  $d$  es la distancia de nuestro espacio métrico  $E$ ). Por comodidad, escribiremos directamente:  $\Phi(t, X) \rightarrow \omega(X)$ .

*Demostración del teorema:* Sea  $Y \in \omega(X)$ , entonces existe  $t_n \rightarrow +\infty$  de modo tal que  $\Phi(t_n, X) \rightarrow Y$ . Por continuidad, para todo  $t$  vale

$$\Phi(t, \Phi(t_n, X)) \rightarrow \Phi(t, Y)$$

pero, además, por definición sabemos que  $\Phi(t, \Phi(t_n, X)) = \Phi(t + t_n, X)$ . Como  $t + t_n \rightarrow +\infty$ , se deduce que  $\Phi(t, Y) \in \omega(X)$ . Esto prueba que  $\mathcal{O}_+(Y) \subset \omega(X)$ , es decir:  $\omega(X)$  es positivamente invariante. Supongamos ahora que  $Y_n \in \omega(X)$  verifica  $Y_n \rightarrow Y$  y tomamos:

- $t_1 > 1$  tal que  $d(\Phi(t_1, X), Y_1) < 1$ ,
- $t_2 > \max\{t_1, 2\}$  tal que  $d(\Phi(t_2, X), Y_2) < \frac{1}{2}$

e inductivamente

- $t_n > \max\{t_{n-1}, n\}$  tal que  $d(\Phi(t_n, X), Y_n) < \frac{1}{n}$ .

Se verifica entonces que  $\Phi(t_n, X)$  converge al valor  $Y$ . Además,  $t_n \rightarrow +\infty$ , así que  $Y \in \omega(X)$ .

Para la segunda parte, supongamos que la órbita  $\mathcal{O}_+(X)$  es precompacta y consideremos cualquier sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$ . Se deduce que  $\Phi(t_n, X)$  tiene alguna subsucesión convergente, lo que prueba que  $\omega(X) \neq \emptyset$ . Además, es claro que  $\omega(X) \subset \overline{\mathcal{O}_+(X)}$ , así que resulta compacto.

Para probar la invariancia, fijemos  $Y \in \omega(X)$  y  $t_0 > 0$ . Queremos hallar  $Z \in \omega(X)$  tal que  $\Phi(t_0, Z) = Y$  (dejamos de lado el caso  $t_0 = 0$  porque es trivial). Consideremos  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $\Phi(t_n, X) \rightarrow Y$ . Como la sucesión  $\Phi(t_n - t_0, X)$  está acotada, podemos suponer que converge a cierto  $Z$ . Entonces vale:

$$\Phi(t_0, \Phi(t_n - t_0, X)) = \Phi(t_n, X) \rightarrow Y.$$

Usando ahora la continuidad de  $\Phi$  concluimos que  $\Phi(t_0, Z) = Y$ .

A continuación, veamos que  $\Phi(t, X) \rightarrow \omega(X)$ . En caso contrario, existen  $\varepsilon > 0$  y  $t_n \rightarrow +\infty$  tales que  $d(\Phi(t_n, X), \omega(X)) \geq \varepsilon$ . Nuevamente, por la compacidad podemos suponer que  $\Phi(t_n, X)$  converge a cierto  $Y \in \omega(X)$ ; luego  $d(Y, \omega(X)) \geq \varepsilon$ , lo que es absurdo.

Para finalizar, supongamos que  $\omega(X)$  se puede escribir como la unión disjunta de dos conjuntos cerrados  $A$  y  $B$ . Como son compactos, podemos fijar  $\varepsilon > 0$  tal que  $d(Y, Z) > 2\varepsilon$  para todo  $Y \in A$  y todo  $Z \in B$ . Por lo anterior, existe  $T$  tal que  $\text{dist}(\Phi(t, X), \omega(X)) < \varepsilon$  para todo  $t \geq T$ . Luego, para cada  $t \geq T$  podemos elegir  $W(t) \in \omega(X)$  tal que  $d(\Phi(t, X), W(t)) < \varepsilon$ . Definimos los conjuntos

$$I_A := \{t \geq T : W(t) \in A\}, \quad I_B := \{t \geq T : W(t) \in B\}$$

que son claramente disjuntos y vale  $I_A \cup I_B = [T, +\infty)$ . Sea  $t_n \in I_A$  tal que  $t_n \rightarrow t$ , entonces  $\Phi(t_n, X) \rightarrow \Phi(t, X)$  y, tomando una subsucesión, podemos suponer que  $W(t_n)$  converge a cierto  $W \in A$  (porque es cerrado). Esto prueba que  $\text{dist}(\Phi(t, X), A) \leq \varepsilon$  y entonces  $W(t) \in A$ . De la misma forma se ve

que  $I_B$  es cerrado, de modo que alguno de ambos conjuntos -ya que estamos, supongamos  $I_B$  es vacío. Esto dice que  $\text{dist}(\Phi(t, X), B) \geq \varepsilon$  para todo  $t \geq T$ , de modo que  $B$  no tiene puntos límites y en consecuencia es vacío.  $\square$

Continuará... o, mejor dicho: evolucionará.