Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 1, versión preliminar (las críticas son bienvenidas)

1 Introducción

Con probabilidad 1, la primera clase de un primer curso sobre ecuaciones diferenciales comienza con el siguiente ejemplo

$$x'(t) = x(t).$$

Más allá de las bromas estudiantiles sobre la función exponencial[1], todo el mundo acepta inmediatamente que $x(t) = e^t$ es una solución y, con un mínimo esfuerzo adicional, que *todas* las soluciones son de la forma $x(t) = Ce^t$, en donde C es una constante arbitraria. Podemos suponer $C \in \mathbb{C}$ y entonces es fácil ver que la fórmula obtenida abarca todas las posibles soluciones complejas de la ecuación. Muy pronto, esta idea elemental se transforma en un método general para obtener soluciones de ecuaciones lineales con coeficientes constantes: "proponer" soluciones de la forma $x(t) = e^{\lambda t}$ y hallar los valores de λ que anulan el *polinomio característico* asociado a la ecuación. Claro que en nuestro ejemplo, todo se torna bastante trivial: como $x'(t) = \lambda x(t)$, al reemplazar en la ecuación resulta

$$\lambda x(t) = x(t)$$

y el polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda - 1$, que obviamente tiene al valor $\lambda = 1$ como única raíz.

Sin embargo, la situación cambia de manera drástica si suponemos que la ecuación tiene un retardo $\tau > 0$, vale decir

$$x'(t) = x(t - \tau).$$

En efecto, ahora al reemplazar $x(t) = e^{\lambda t}$ en la ecuación resulta

$$\lambda x(t) = x(t - \tau) = e^{\lambda(t-\tau)} = e^{-\lambda\tau}x(t).$$

En consecuencia λ debe ser solución de la ecuación característica $P(\lambda) = 0$, donde P ya no es un polinomio sino una función trascendente: $P(\lambda) = \lambda - e^{-\lambda\tau}$. Como $\lambda = 0$ no es raíz, podemos reemplazar $z = \frac{1}{\lambda}$ y escribir la ecuación anterior como

$$ze^{-\tau/z} = 1.$$

[1] 'Eh, integrate'. '¿Para qué? Da igual.'

Notemos ahora que la función $g(z) = ze^{-\tau/z}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$ y no se anula en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$; luego, por el teorema de Picard se deduce que $g^{-1}(1)$ tiene infinitos elementos, es decir: las soluciones de la ecuación característica forman un conjunto de la forma $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $|\lambda_k| \to \infty$. Esto implica que la ecuación diferencial tiene infinitas soluciones complejas de la forma $x(t) := e^{\lambda_k t}$; más aun, cualquier combinación lineal compleja de estas funciones también es solución, de modo que el espacio de soluciones tiene dimensión infinita. Esto vale también si estamos interesados únicamente en las soluciones reales, pues es claro que x es solución compleja si y solo tanto $\mathrm{Re}(x)$ como $\mathrm{Im}(x)$ son soluciones reales. ¿Son estas todas las soluciones posibles? Es fácil ver que no aunque, como veremos más adelante, la tarea de caracterizar el conjunto de soluciones requiere algo de trabajo.

No hace falta en realidad conocer con precisión los temas que hemos mencionado; el objetivo de esta introducción era dar una primera idea acerda de la complejidad del tema que vamos a estudiar. A partir del ejemplo más elemental de todos hemos llegado, en pocas líneas, a invocar uno de los teoremas más profundos e interesantes del análisis complejo, de modo que cabe esperar en esta materia un recorrido de lo más atractivo, que involucra diversas ramas de la matemática.

2 Motivación - Modelos de crecimiento poblacional

La manera más elemental de describir el crecimiento de una población está dada por el modelo de Malthus. Se asume que existe una tasa $b > 0$ de nacimientos y una tasa $d > 0$ de muertes; de esta forma, si N es la población en el instante t, se tiene:

$$N'(t) = -dN(t) + bN(t).$$

Sin duda se trata de un modelo poco realista, pero su resolución es muy sencilla y servirá como primera motivación para estudiar ecuaciones más generales. Si suponemos por ejemplo que $N(0) = N_0$, la solución es $N(t) = N_0 e^{(b-d)t}$, cuyo comportamiento depende del signo de $b - d$. Como se trata de poblaciones, es lógico suponer $N_0 > 0$; en tal caso la solución crece y tiende a infinito para $t \to +\infty$ cuando $b > d$ y decrece hacia 0 para $t \to +\infty$ cuando $b < d$. El valor $b = d$ no tiene mayor interés, pues dice que la población se mantiene constantemente igual a N_0. Para $b \neq d$, la única solución constante o *equilibrio* es $N \equiv 0$. Notemos que las anteriores observaciones respecto del comportamiento de la solución para $t \to +\infty$ siguen valiendo incluso para $N_0 < 0$, vale decir

$$\lim_{t\to+\infty} |N(t)| = +\infty \qquad \text{si } b < d$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = 0 \qquad \text{si } b < d$$

Esto se puede expresar diciendo que $N = 0$ es un equilibrio *inestable* cuando $b > d$ y *asintóticamente estable* cuando $b < d$. También se puede decir, en este caso, que $N = 0$ es un *atractor global* del sistema (más adelante veremos una definición más precisa de todos estos conceptos).

Un poco más apropiado es el modelo logístico de Verhulst, en el que se asume que la población se autoregula condicionada por algún factor que limita su crecimiento indefinido (por ejemplo, escasez de algún recurso). Se asume que hay un valor máximo M tolerable de población; de esta manera, la población crece cuando N_0 es menor que dicho valor y decrece cuando es mayor. Una manera de obtener este comportamiento consiste en suponer que la tasa de crecimiento $\frac{N'}{N}$ es proporcional a la diferencia $M - N$, es decir

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = c(M - N(t)),$$

o bien

$$N'(t) = N(t)(b - aN(t))$$

donde $b, a > 0$. La ventaja de escribirlo de esta manera es que podemos aceptar $N \equiv 0$ como solución; la ecuación tiene además otro equilibrio que es el valor $M := \frac{b}{a}$. Esta ecuación también es fácil de integrar empleando fracciones simples; la solución general para $N_0 \neq 0$ tiene la forma

$$N(t) = \frac{b}{a + Ce^{-bt}},$$

con $C := \frac{b}{N_0} - a$. Por supuesto, los valores iniciales $N_0 < 0$ no tienen sentido en el modelo biológico; es fácil ver que la solución no está globalmente definida en el intervalo $[0, +\infty)$ pues se hace infinita cuando t se aproxima al valor $\frac{\ln(-C/a)}{b}$. Para $N_0 > 0$, se comprueba que $N(t) \to \frac{b}{a}$ si $t \to +\infty$, lo que muestra que el equilibrio $N \equiv \frac{b}{a}$ es asintóticamente estable, mientras que $N \equiv 0$ es inestable. Esto resulta obvio pues conocemos la solución; sin embargo, a fin de analizar ejemplos más abstractos es útil ver cómo se pueden obtener estas conclusiones directamente a partir de la ecuación. Supongamos por ejemplo que $N_0 > \frac{b}{a}$, entonces inicialmente resulta $N'(t) < 0$. Observemos, además, que $N(t_0) \neq \frac{b}{a}$ para todo t_0, pues el problema de valores iniciales

$$N' = N(b - aN), \qquad N(t_0) = \frac{b}{a}$$

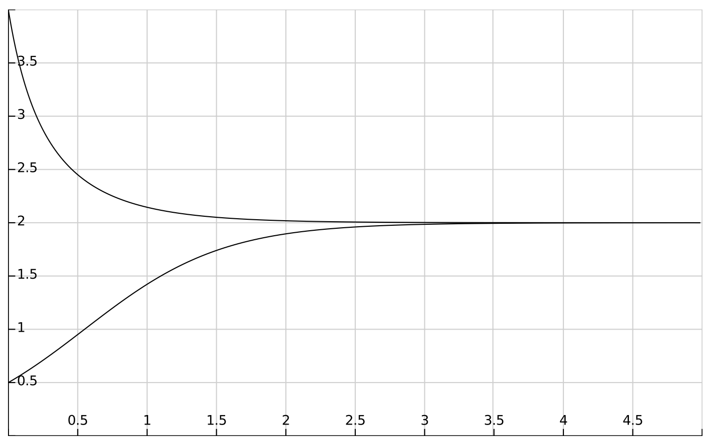
tiene por única solución el equilibrio $N \equiv \frac{b}{a}$. Se deduce que $N(t) > \frac{b}{a}$ (y, en consecuencia, decrece) para todo t. Por resultados clásicos de la teoría de ecuaciones ordinarias, está definida en $[0, +\infty)$ y, además, converge a un valor límite $N_* \geq \frac{b}{a}$. Reemplazando en la ecuación se deduce que

$$\lim_{t \to +\infty} N'(t) = N_*(b - aN_*).$$

Por otra parte, observemos por ejemplo que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale

$$N(k + 1) - N(k) = N'(t_k)$$

para cierto $t_k \in (k, k+1)$, lo que prueba que $N_*(b - aN_*) = 0$ y, en definitiva, que $N_* = \frac{b}{a}$. Un razonamiento análogo vale para las soluciones que comienzan con un valor $N_0 \in \left(0, \frac{b}{a}\right)$. Notemos que el equilibrio $N \equiv \frac{b}{a}$ es asintóticamente estable pero no un atractor global, pues solo convergen a las soluciones que comienzan con un valor inicial positivo. Por ejemplo, en el siguiente gráfico se muestran dos trayectorias para $a = 1$ y $b = 2$:



La idea de introducir un retardo en este tipo de modelos surge de efectuar la sencilla suposición de que los nuevos individuos tardan un cierto tiempo τ en alcanzar la madurez (algunos más que otros, claro... aunque esto no se tendrá en cuenta aquí). En general, se entiende que la 'madurez' viene dada por la capacidad de reproducirse; entonces los dos modelos anteriores toman respectivamente la siguiente forma:

$$N'(t) = -dN(t) + bN(t - \tau)$$

y

$$N'(t) = N(t)(b - aN(t - \tau)).$$

A diferencia del modelo sin retardo, ya no es fácil obtener soluciones explícitas más allá de los equilibrios, que son los mismos de antes. El primer caso es una ecuación *lineal*, que estudiaremos de manera detallada; el segundo es un caso de una ecuación *no lineal*, que en general pueden ser muy complicadas aunque en ciertas situaciones es posible efectuar un estudio cualitativo bastante completo.

Por supuesto, los ejemplos anteriores no agotan los posibles modelos de crecimiento poblacional. La ecuación logística tiene la desventaja de que no incluye explícitamente el valor d; en tal sentido, en otros modelos se prefiere dejar a los muertos donde estaban y proponer otro mecanismo auto-regulatorio:

$$N'(t) = -dN(t) + bN(t - \tau)\varphi(N(t - \tau)).$$

El caso $\varphi \equiv 1$ recupera la ecuación de Malthus con retardo; en general, se supone que φ se hace más pequeño a medida que N crece. Por ejemplo, en el modelo de Nicholson para ciertas poblaciones de insectos el valor de φ expresa la probabilidad de supervivencia de una larva, dado por una distribución exponencial: $\varphi(x) = e^{-x/N_0}$. Se obtiene entonces una ecuación de la forma

$$N'(t) = -dN(t) + bN(t-\tau)e^{-\gamma N(t-\tau)}.$$

Más en general, podemos considerar ecuaciones o sistemas de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \tag{1}$$

en donde τ puede ser constante o una función $\tau(t, x(t))$. También existen situaciones en las que hay más de un retardo:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_N)).$$

Los ejemplos previos son casos de retardos *discretos*, a diferencia de las ecuaciones con retardos *distribuidos*, que contienen términos de la forma

$$\int_{t-\tau}^{t} k(t-s)x(s)\, ds = \int_0^{\tau} k(s)x(t-s)\, ds,$$

en donde el núcleo k satisface $\int_0^\tau k(s)\, ds = 1$. Esta situación incluye el caso de *retardo no acotado* $\tau = +\infty$, en el que $x'(t)$ depende de toda la historia $\{x(s) : s \le t\}$. En ocasiones resultará de utilidad escribir la ecuación como

$$x'(t) = F(t, x_t),$$

donde F es un operador definido en un subconjunto de $\mathbb{R} \times C$, para algún espacio C apropiado de funciones continuas y x_t denota la función definida por $x_t(s) := x(t+s)$. Por ejemplo, la ecuación (1) se puede escribir como $x'(t) = F(t, x_t)$ tomando $C = C([-\tau, 0])$ y $F : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}$ dada por $F(t, \phi) := f(t, \phi(0), \phi(-\tau))$. Pero esta notación también incluye ecuaciones con retardo distribuido; por ejemplo, la ecuación

$$x'(t) = -dx(t) + \int_{t-\tau}^{t} k(t-s)x(s)\, ds$$

se puede escribir $x'(t) = F(x_t)$, donde $F : C([-\tau, 0]) \to \mathbb{R}$ está dada por

$$F(\phi) := -d\phi(0) + \int_0^{\tau} k(s)\phi(-s)\, ds.$$

En algunos casos tiene interés estudiar también ecuaciones o sistemas de orden superior. Como motivación, podemos comenzar considerando la ecuación del péndulo con fricción

$$u''(t) + cu'(t) + a\text{sen}u(t) = 0,$$

cuyos equilibrios son $u \equiv k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Observemos que si u es solución entonces también $u + 2\pi$ es solución, de modo que podemos limitarnos a considerar las soluciones tales que $u(0) \in [0, 2\pi)$. Como sugiere la intuición, el equilibrio $u \equiv 0$ es asintóticamente estable: para una explicación informal, basta observar que si u está cerca de 0 entonces sen$u \simeq u$; luego, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ son las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 + c\lambda + a = 0$$

entonces las soluciones que comienzan cerca del origen verifican

$$u(t) \simeq a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ o bien

$$u(t) \simeq a e^{\lambda t} + b t e^{\lambda t}$$

si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Observemos que si $c^2 \geq 4a$ entonces las raíces son números reales negativos, por lo cual $u(t) \to 0$ para $t \to +\infty$. En cambio, si $c^2 < 4a$ las raćes son complejas, con parte real $-c/2 < 0$ y también se deduce que $u(t) \to 0$. En cambio, u está cerca de π entonces sen$u \simeq \pi - u$ y las soluciones verifican

$$u(t) \simeq \pi + a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Esto muestra que el equilibrio $u \equiv \pi$ es inestable; cabe preguntarse, entonces: ¿es posible agregar a la ecuación una fuerza externa que lo estabilice? La idea intuitiva consiste en suponer que estamos cerca del equilibrio pero el péndulo cae, entonces lo 'empujamos' hacia el lado opuesto al de la caída con cierta fuerza proporcional a la distancia al punto de equilibrio equilibrio. Pero este proceso no es instantáneo, ya que se tarda cierto tiempo τ en 'reaccionar'. Se obtiene entonces la ecuación

$$u''(t) + cu'(t) + a\mathrm{sen}(u(t)) = \mu(\pi - u(t - \tau)).$$

Es posible probar que, para cierto $\mu > 0$, el equilibrio $u \equiv \pi$ se vuelve estable. Pero para comenzar veremos un ejemplo más sencillo, que permitirá mostrar de manera inmediata que el mundo de las ecuaciones con retardo es muy diferente al de las ecuaciones ordinarias.

Supongamos, como en el caso previo, un problema de 'control': se procura que una cierta cantidad $u(t)$ se mantenga cercana a 0. Para esto se propone una ecuación de la forma

$$u'(t) = c(t),$$

con la estrategia de disminuir el valor de u en caso de que u sea positivo y aumentarlo en caso contrario. Por ejemplo, se puede elegir un control $c(t)$ proporcional a $u(t)$, vale decir $c(t) = -\alpha u(t)$ para cierta constante $\alpha > 0$. De esta forma, para cualquier valor inicial de u resulta $u(t) \to 0$ para $t \to +\infty$. El valor α proporciona una medida de la velocidad con que u se va a 0; más precisamente, $u(t) = u(0)e^{-\alpha t}$. Sin embargo, si la acción del término c tiene un retardo, la situación es muy diferente. Por ejemplo, consideremos $\alpha = 1$ y la ecuación

$$u'(t) = -u(t - \tau).$$

La idea intuitiva es que si reaccionamos rápidamente (es decir, si τ es pequeño), entonces todavía podemos controlar u, pero tomando por ejemplo $\tau = -\frac{\pi}{2}$ resulta que $u(t) = \operatorname{sen}(t)$ es solución, ya que

$$u'(t) = \cos(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -u\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Esto da lugar a una primera novedad respecto de las ecuaciones ordinarias: las soluciones de esta ecuación pueden ser *oscilatorias*, es decir, tener ceros arbitrariamente grandes. Para $\tau = 0$ esto no puede ocurrir pues las trayectorias no se cruzan y $u \equiv 0$ es solución. Podríamos suponer, de todas formas, que todavía logramos controlar u ya que se mantiene acotada; sin embargo, para valores mayores de τ se obtienen oscilaciones no acotadas: un verdadero descontrol.

A fin de entender mejor la situación, en la próxima clase efectuaremos un estudio completo de la ecuación con retroalimentación o *feedback*

$$u'(t) = -\alpha u(t - \tau). \tag{2}$$