Notas de clase sobre la Transformada de Fourier

Pablo L. De Nápoli

3 de noviembre de 2015

1. La definición de la transformada de Fourier

Definición 1.1 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos su transformada de fourier por*

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\, dx$$

donde $x \cdot \xi$ significa el producto escalar

Observación 1.2 *Tenemos la obvia pero importante estimación*

$$\| \widehat{f} \|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} \| f \|_1 \,.$$

Designemos por $\mathcal{F}$ el operador transformada de Fourier. Así $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal acotado.

Teorema 1.3 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{f}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración: Como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dado $\varepsilon > 0$ encontraremos un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tal

$$\int_{|x|\geq\eta} | f(x) | \, dx < \varepsilon.$$

Por la continuidad de $e^{-i\cdot z}$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\text{si } \; | z | < \delta \Rightarrow | e^{-iz} - 1 | < \varepsilon.$$

Tomemos h tal que $\| h \| \leq \frac{\delta}{\eta}$ (que depende de ε pero no de ξ). Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz si

$$\| x \| < \eta \Rightarrow | x \cdot h | \leq \| x \| \cdot \| h \| \leq \eta \, \| h \| < \delta$$

$$\Rightarrow | e^{-ix\cdot h} - 1 | < \varepsilon$$

y entonces resulta que:

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)\right| &= \left|(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n n} f(x)e^{-ix\cdot(\xi+h)}dx-(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx\right|\\ &\leq (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x)(e^{-ix\cdot(\xi+h)}-e^{-ix\cdot\xi})\right|dx\\ &\leq (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x)e^{-ix\cdot\xi}(e^{-ix\cdot h}-1)\right|dx\\ &\leq (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\cdot|e^{-ix\cdot h}-1|dx\\ &\leq (2\pi)^{-n/2}\left[\int_{\|x\|\geq\eta}\mid f(x)\mid\cdot\mid e^{-ix\cdot h}-1\mid dx+\int_{\|x|<\eta}|f(x)|\cdot|e^{-ix\cdot h}-1|dx\right]\\ &\leq (2\pi)^{-n/2}\left[2\int_{\|x\|\geq\eta}\mid f(x)\mid dx+\varepsilon\int_{\|x|<\eta}|f(x)|dx\right]\\ &\leq (2\pi)^{-n/2}(2\varepsilon+\varepsilon\parallel f\parallel_1)=C\varepsilon\end{aligned}$$

con C una constante (depende de f pero no de ε). Esto prueba que $\widehat{f}$ es uniformemente continua. $\square$

2. La transformada de Fourier y las derivadas

El siguiente teorema permite calcular la transformada de fourier de una a derivada:

Teorema 2.1 *Si* $f\in C^1(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)$ *es tal que*

i)

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^1(\mathbb{R}^n)$$

ii)

$$f(x)\to 0 \quad \textit{cuando} \quad \mid x\mid\to\infty$$

entonces

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi)=i\ \xi_j\ \widehat{f}(\xi).$$

Demostración: Integrando por partes se tiene:

$$\begin{aligned}\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\ e^{-ix\cdot\xi}\ dx\\ &= (2\pi)^{-n/2}i\xi_j\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ e^{-ix\cdot\xi}dx=i\xi_j\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 2.2 *Supongamos que $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ es tal que*

i)

$$D^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad para \quad |\beta| \leq k \text{ (en particular } D^0 f = f \in L^1(\mathbb{R}^n))$$

ii)

$$D^\beta f(x) \to 0 \quad para \quad \beta < k$$

y que α es un multi-índice tal que $|\alpha| = k$ entonces

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \ \widehat{f}(\xi)$$

(por inducción en k).

Caso particular: Tomemos $\alpha = (0, 0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$. Queda

$$\widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}}(\xi) = -\xi_j^2 \widehat{f}(\xi)$$

entonces tenemos que

$$\widehat{\Delta f}(\xi) = -|\xi|^2 \ \widehat{f}(\xi)$$

El siguiente resultado se refiere a las derivadas de la transformada de Fourier. Para la demostración, requerimos un lema:

Lema 2.3 (derivación bajo el signo de integral) *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y sea $g : U \times V \to \mathbb{R}$ derivable respecto de ξ_j tal que*

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x, \xi) \right| \leq h(x) \quad \forall (x, \xi) \in U \times V$$

donde $h(x) \in L^1(U)$, y sea $F : V \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(\xi) = \int_U g(x, \xi) dx$ entonces

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_j}(\xi) = \int_U \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x, \xi) dx.$$

Demostración: Sea $\xi \in V$. Si $h \neq 0$ es suficientemente pequeño tenemos

$$\frac{F(\xi + he_j) - F(h)}{h} = \int_U \left[\frac{g(x, \xi + he_j) - g(x, \xi)}{h} \right] dx.$$

Ahora por definición se tiene en cada punto

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x, \xi + he_j) - g(x, \xi)}{h} = \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x, \xi).$$

Por otra parte, por el teorema del valor medio:

$$\left| \frac{g(x, \xi + he_j) - g(x, \xi)}{h} \right| = \left| \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x, \xi + \theta e_j) \right| \leq h(x)$$

(aquí $\theta = \theta(x,\xi) \in (0,1)$), y como h es integrable, por convergencia mayorada

$$\lim_{h\to 0} \int_U \left[\frac{g(x,\xi+he_j)-g(x,\xi)}{h}\right] dx = \int_U \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x,\xi)dx.$$

Por lo que se obtiene la conclusión del enunciado. $\square$

Teorema 2.4 *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{f}$ es derivable respecto de ξ_j y se tiene*

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = (\widehat{-ix_j f})(\xi).$$

Demostración: Aplicamos el lema anterior a

$$g(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2} f(x) e^{-\mathrm{ix}.\xi}$$

(con $U = V = \mathbb{R}^n$).

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2}(-ix_j) f(x) e^{-ix\cdot\xi},$$

de donde

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x,\xi)\right| \leq (2\pi)^{-n/2} \mid x_j f(x) \mid$$

que por hipótesis es integrable. Por lo tanto

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix_j)\ f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx.$$

$\square$

Corolario 2.5 *Supongamos que α es un multi-índice $\mid \alpha \mid = k$ y que $x^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo β con $\mid \beta \mid \leq k$ entonces*

$$(D^\beta \widehat{f})(\xi) = (\widehat{(-ix_j)^\alpha f})(\xi).$$

3. La fórmula de inversión

Lema 3.1 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces:*

$$(f * \widehat{g})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)\ g(y)\ e^{-ix\cdot y}\ dy.$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(f * \widehat{g})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, \widehat{g}(x-t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \left[(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(x-t)\cdot y} dy \right] dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2}\, f(t)\, g(y)\, e^{-ix\cdot y}\, e^{-it\cdot y}\, dydt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{it\cdot y} dt \right] e^{-ix\cdot y}\, dy \quad = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, \widehat{f}(y) e^{-ix\cdot y} dy.
\end{aligned}
$$

□

Caso particular: Si $x = 0$ obtenemos la fórmula

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, \widehat{g}(-t)\, dt = \int_{R^n} \widehat{f}(y)\, g(y)\, dy$$

o sea

$$\langle f, \widetilde{\widehat{g}} \rangle = \langle \widehat{f}, g \rangle \quad \text{para } \; f, g \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Lema 3.2 (efecto de una dilatación sobre la transformada de Fourier) *Si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$, notemos $\delta_\varepsilon g$ a la dilatada de g por el factor ε o sea,*

$$\delta_\varepsilon g(x) = g(\varepsilon x).$$

Entonces

$$\widehat{(\delta_\varepsilon g)}(\xi) = \varepsilon^{-n} \widehat{g}(\xi/\varepsilon) = \widehat{g}_\varepsilon(\xi)$$

(donde f_ε significa la aproximación de la identidad $f(x) = \varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon)$ obtenida a partir de f).

Demostración: Haciendo el cambio de variable $y = \varepsilon . x \Rightarrow dy = \varepsilon^n dx$ (ε^n es el Jacobiano)

$$\widehat{(\delta_\varepsilon g)}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx = \varepsilon^{-n} \int^{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(x/\varepsilon)\cdot\xi} dy$$

$$= \varepsilon^{-n} \widehat{g}(x/\varepsilon).$$

□

Lema 3.3 *Si $g(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ entonces $\widehat{g}(\xi) = g(\xi)$.*

Demostración: Por medio del siguiente lema se reduce inmediatamente al caso $n = 1$

$$g(x) = e^{-x^2/2}$$

$$g(0) = 1$$

$$g'(x) = -xe^{-x^2/2} = -xg,$$

por otra parte

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{g}\prime(\xi) = \widehat{(-ixg)}(\xi) = i\widehat{g'}(\xi) = -\xi \cdot \widehat{g}(\xi).$$

Así pues $\widehat{g}$ es otra solución de la misma ecuación diferencial $g' = -xg$.

Además

$$\widehat{g}(0) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx = 1.$$

Por la unicidad de la solución, concluimos que $\widehat{g} = g$. □

Lema 3.4 *Si*

$$f(x) = f_1(x_1).f_2(x_2)\dots f_n(x_n)$$

con $f_1, f_2, \dots, f_n \in L^1(\mathbb{R})$, *entonces*

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}_1(\xi_1).\widehat{f}_2(\xi_2)\dots\widehat{f}_n(\xi_n).$$

Demostración: Es inmediata por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\ xi}dx = \prod_{j=1}^{n}(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} f_j(x_j)e^{-ix_j\cdot\xi_j}\ dx_j \\ &= \widehat{f}_1(\xi_1)\cdot\widehat{f}_2(\xi_2)\dots\widehat{f_n}(\xi_n).\end{aligned}$$

□

Teorema 3.5 (Fórmula de inversión) *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *entonces se verifica que*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{-ix\cdot y}\ dy$$

en casi todo punto.

Demostración: Eligiendo $g(x) = (2\pi)^{-n/2}e^{-\|x\|^2/2}$ de modo que $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx = 1$, resulta que

$$\begin{aligned}(f * g_\varepsilon)(x) &\overset{\text{Lema 3.3}}{=} (f * \widehat{g}_\varepsilon)(x) \overset{\text{Lema 3.2}}{=} \\ &(f * \widehat{(\delta_\varepsilon g)})(x) \overset{\text{Lema 3.1}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)g(\varepsilon y)\ e^{-ix\cdot y}\ dy.\end{aligned}$$

Ahora cuando $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)g(\varepsilon y)e^{-ix\cdot y}\ dy \to \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)g(0)e^{-ix\cdot y}\ dy = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{-ix\cdot y}dy,$$

por convergencia mayorada (ya que estamos suponiendo que $\widehat{f}$ es integrable y g es acotada).

Ahora justamente como $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx = 1,$$

se tiene que $f * g_\varepsilon \to f$ en L^1[1] con lo que

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{-ix\cdot y}\, dy \tag{1}$$

como funciones de L^1 (es decir en casi todo punto). $\square$

Observación 3.6 *Se puede ver que la fórmula (1) vale en cada punto de continuidad de f, y más aún en todo punto de Lebesgue de f*[2]*.*

Definición 3.7 *Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos la anti-transformada de Fourier por*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi$$

la fórmula de inversión afirma que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{f} = \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$$

lo que justifica la notación $\mathcal{F}^{-1}$. Claramente las propiedades de la anti-transformada son análogas a las de la transformada.

Observación 3.8 *El Lema 3.1 dice que $f * \widehat{g} = \mathcal{F}^{-1}(f * \widehat{g})$.*

Observación 3.9 *Designemos por $\widetilde{f}$ la reflejada de f dada por*

$$\tilde{f}(x) = f(-x)$$

entonces

$$\mathcal{F}^{-1}(\widetilde{f}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(-x) e^{ix\cdot\xi}\, dx = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy\cdot\xi}\, dx = \widehat{f}(\xi).$$

La fórmula de inversión entonces afirma pues que

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = \widetilde{f}$$

siempre que f y $\widehat{f}$ estén en $L^1(\mathbb{R}^n)$. En particular $\mathcal{F}^4 = Id \Rightarrow$ los únicos posibles autovalores de la transformada de Fourier son $\{\pm 1, \pm i\}$.

[1]Wheeden & Zygmund Teorema 9.6 pag. 148.

[2]Wheeden & Zygmund ejemplo 9.12 pag. 152 teoremas 9,9y9,13.

Observación 3.10 *Por la fórmula de inversión, si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *se tiene, en particular, que*

$$\| f \|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} \| \widehat{f} \|_1 \text{ de modo que } f \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Corolario 3.11 *Supongamos que* $f, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *son tales que* $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *En la fórmula del Lema 3.1,*

$$\langle f, (\tilde{\widehat{g}}) \rangle = \langle \widehat{f}, g \rangle,$$

pongamos $g = \widehat{h} \Rightarrow \widehat{g} = \tilde{h}$, *por la fórmula de inversión queda:*

$$\langle f, h \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{h} \rangle (\text{Teorema de Plancherel}).$$

Observación 3.12 *En general es falso que si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Por ejemplo* $f = \chi_{[-a,a]} \in L^1(\mathbb{R})$, *pero*

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx = (2\pi)^{-1/2} \frac{e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}}{-i\xi} = (2\pi)^{-1/2} \frac{\sin(a\xi)}{2\xi},$$

que no pertenece a $L^1(\mathbb{R})$.

4. El espacio de Schwarz

Sea

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ C^\infty \text{ tales que } \forall \alpha, \beta \text{ multíndices } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} | x^\alpha D^\beta f | < +\infty \right\}.$$

Los elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se llaman funciones rapidamente decrecientes en ∞. La familia de seminormas:

$$\| f \|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} | x^\alpha D^\beta f |$$

hace de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ un espacio vectorial topológico localemente convexo.

Observación 4.1 *Si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *y* $p \in \mathbb{R}[X]$ *es un polinomio,* $p \cdot f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Si α *es un multi-índice y* $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $D^\alpha f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Observación 4.2 *Si* $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *para todo* p. *De hecho encontramos* M *tal que*

$$| x_i^2 f(x) | \leq M \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$| (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) f(x) | \leq M \cdot n$$

o sea

$$|f(x)| \leq \frac{Mn}{| x |^2}$$

En particular $f(x) \to 0$ *cuando* $|x| \to \infty$. *Más generalmente: dado* $k \in \mathbb{N}$, *encontramos una constante* C *tal que*

$$| (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^k f(x) | \leq C,$$

por lo que

$$|f(x)| \leq \frac{1}{| x |^{2k}}$$

$$\int_{\|x\|>1} | f(x) |^p \, dx \leq \int_{\|x\|>1} \frac{1}{| x |^{2kp}} \, dx =$$

$$= C^p \int_1^{+\infty} r^{-2kp} r^{n-1} dr < +\infty$$

si $n - 2kp < 0$, *o sea si* $n < 2kp$ *,o* $k > \frac{n}{2p}$.

Esto muetra que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *para todo* p.

Los resultados anteriores implican el siguiente resultado:

Teorema 4.3 *La transformada de Fourier aplica* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *biyectivamente sobre si mismo y si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *se tiene* $\forall \alpha$ *multi-índice*

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

$$D^\alpha(\widehat{f}) = \widehat{(-i\omega)^\alpha f}$$

5. La transformada de Fourier en L^2 : Teorema de Plancherel

En particular, si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene la igualdad de Plancherel

$$\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle,$$

y por lo tanto,

$$\| f \|_2 = \| \widehat{f} \|_2 \text{ (tomando } f = g).$$

Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ podemos extender por continuidad la transformada de Fourier a un operador $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$.

La igualdades:

1. $\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$,

2. $\| f \|_2 = \| \widehat{f} \|_2$,

se verificará entonces $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Análogamente podemos extender la anti-transformada, con lo que se ve que $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ resulta un isomorfismo unitario.

¿ Cómo puede calcularse la transformada (o la anti-transformada) de una función $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$?

Tomemos un $r > 0$ y sea $g_r = f\chi_{B(0,r)}$. Tenemos que $g_r \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y que $g \to f$ en L^2 cuando $r \to \infty$. De hecho

$$\| f - g_r \|_2^2 = \int_{\{\|x\|>r\}} | f(x) |^2 \, dx \to 0$$

cuando $r \to \infty$ pues $f \in L^2$. Entonces

$$\| \widehat{f} - \widehat{g}_r \|_2 \to 0$$

en L^2, es decir:

$$\widehat{g}_r(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{B(0,r)} f(x) e^{-\mathrm{ix}.\xi} dx \to \widehat{f}(\xi)$$

en L^2 cuando $r \to \infty$.

Esto permite calcular $\widehat{f}$ si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

6. Aplicación a la ecuacion del calor

Consideremos el problema: encontrar una función $u = u(x,t)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u \quad \text{para } t > 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Apliquemos la transformada de Fourier en x, *o* sea introduzcamos la función:

$$\widehat{u}(\xi, t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t) \, e^{-i\xi \cdot x} \, dx$$

(operamos formalmente, suponiendo por ejemplo que $u(x,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$).

Como transformamos solamente en x encontramos que:

$$\widehat{(u_t)}(\xi, t) = (\widehat{u})_t(\xi, t)$$

(derivando bajo el signo de integral) mientras que:

$$\widehat{(\Delta_x u)}(\xi, t) = - | \xi |^2 \, \widehat{u}(\xi, t)$$

por lo que obtenemos para cada ξ un problema de ecuaciones ordinarias

$$\begin{cases} (\widehat{u})_t(\xi, t) = - | \xi |^2 \, \widehat{u}(\xi, t) \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi), \end{cases}$$

con lo que resulta:
$$\widehat{u}(\xi,t)=\widehat{f}(\xi)e^{-|\xi|^2t}.$$
Queremos hallar su anti-transformada de Fourier
$$g_t(\xi)=e^{-|\xi|^2t}=e^{-|\lambda\xi|^2/2}=\delta_\lambda g$$
con $\lambda=\sqrt{2t}$. Siendo
$$g(\xi)=e^{-|\xi|^2/2}\Rightarrow\mathcal{F}^{-1}(g)=g.$$

$$\mathcal{F}^{-1}(g_t(\xi))=\lambda^{-n}\mathcal{F}^{-1}(g)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)=\frac{1}{(2t)^{-n/2}}e^{-|x|^2/(4t)}.$$

Como $\widehat{(f*g)}(\xi)=(2\pi)^{n/2}\widehat{f}.\widehat{g}$,
$$\widehat{u}(\xi,t)=\widehat{f}(\xi)e^{-|\xi|^2t}$$
entonces
$$u(x,t)=(f*K_t)(x)=\frac{1}{(4\pi t)^{-n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(z-x)e^{-|x|^2/(4t)}dz,$$
donde $K_t(x)=\frac{1}{(4\pi t)^{-n/2}}e^{-|x|^2/(4t)}$ (núcleo del calor), pongamos $\varepsilon=\sqrt{t}$
$$K_t(x)=\frac{1}{(4\pi)^{-n/2}}\varepsilon^{-n}e^{-|\varepsilon|^2/4},$$
entonces K_t es una aproximación de la identidad.

Teorema 6.1 *Si $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces*
$$u(x,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{-n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(z-x)e^{-|x|^2/(4t)}dz$$
es C^∞ en $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ y es una solución de $u_t=\Delta_x u$.

Si $p<\infty$, $u(\_,t)\to f$ en L^p cuando $t\to 0$.

Si f es acotada y continua, entonces u es continua en $\mathbb{R}^n\times[0,+\infty)$ y $u(x,0)=f(x)$.