Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Pablo De Nápoli

21 de agosto de 2002

1 El Teorema de Existencia y Unicidad

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideramos el problema de valores iniciales: encontrar una función $y : (a,b) \to \Omega$ de clase C^1 siendo (a,b) un intervalo que contiene a t_0, tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Para poder enunciar el teorema de existencia y unicidad de solución para este problema, necesitamos una definición:

Definición 1.1 *Diremos que la función $f(t,y)$ satisface una condición de Lipschitz con respecto a la variable y (en el abierto $\mathbb{R} \times \Omega$) si existe una constante L tal que*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \, \forall t, \forall y_1, y_2 \in \Omega$$

Diremos que $f(t,y)$ satisface localmente una condición de Lipschitz en Ω si para cada punto $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ existe un entorno $U = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times \Omega$ y una constante $L = L(U)$ tales que f satisface una condición de Lipschitz cuando la restringimos a U:

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \, \forall (t, y_1) \in U, (t, y_2) \in U$$

Notamos que si las derivadas$\frac{\partial f}{\partial y_i}(t,y)$ $(1 \leq i \leq n)$ son acotadas, el teorema del valor medio implica que f satisface una condición de Lipschitz. Deducimos que si $f \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega)$ entonces f satisface localmente una condición de Lipschitz.

Podemos entonces enunciar una primera versión del teorema de existencia y unicidad (local):

Teorema 1.2 *Supongamos que la función $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ es continua, y satisface localmente una condición de Lipschitz en $\mathbb{R} \times \Omega$. Entonces existe un intervalo (a,b) con $a < t_0 < b$ tal que el problema de valores iniciales (1) posee una única solución en (a,b).*

1.1 El teorema de punto fijo de Banach

La prueba del teorema de existencia y unicidad, se basa un teorema de punto fijo. Para enunciarlo, necesitamos primero una definición

Definición 1.3 *Sea (E, d) un espacio métrico y $K : E \to E$ una aplicación. Diremos que K es un operador de contracción si existe una constante α (con $0 \leq \alpha < 1$) tal que*

$$d(Ky_1, Ky_2) \leq \alpha d(y_1, y_2) \, \forall y_1, y_2 \in K$$

Teorema 1.4 *Sea (E, d) un espacio métrico completo y $K : E \to E$ un operador de contracción. Entonces K tiene un único punto fijo, o sea existe un único $y_0 \in E$ tal que $Ky_0 = y_0$*

1.2 Reformulación como un problema de punto fijo

La prueba del teorema de existencia y unicidad se basa en la siguiente observación: son equivalentes las siguientes dos afirmaciones

1. $y \in C[a, b] \cap C^1(a, b)$ y es solución de (1).
2. $y \in C[a, b]$ y es solución de la ecuación integral:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, ds \tag{2}$$

Esto nos permite reformular el problema (1) como el problema de encontrar un punto fijo del operador:

$$Ky(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$$

Vamos a definir con precisión el dominio del operador K. Como f es continua, restringiéndonos si es necesario a un entorno de (t_0, y_0) (esto es, achicando el abierto Ω), podemos suponer sin perder generalidad, que f es acotada por una constante M:

$$|f(t, y)| \leq M \, \forall (y, t) \in [a, b] \times \Omega$$

Introduzcamos entonces la región:

$$R_{a,b} = \{(t, y) : a < t < b, |y(t) - y_0| \leq M|t - t_0|\}$$

Entonces notamos que si $y(t)$ es una solución de (2) su gráfica está contenida en la región R pues:

$$|y - y_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s))| ds \right| \leq M|t - t_0|$$

Notamos también que dado que Ω es abierto y $(t_0, y_0) \in \Omega$ podemos encontrar un intervalo $[a, b]$ con $a < t_0 < b$ de modo que $R_{a,b} \subset \Omega$. Suponemos que hemos elegido a, b de manera que esto se cumple.

Podemos entonces considerar el espacio métrico

$$E = \{y \in C([a, b], \mathbb{R}^n) : |y(t) - y_0| \leq M|t_0 - t| \, \forall t \in [a, b]\}$$

con la distancia

$$d(y_1, y_2) = \sup_{t \in [a,b]} |y_1(t) - y_2(t)|$$

Notamos que E es un subespacio cerrado del espacio métrico completo $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, y es por lo tanto un espacio métrico completo.

Vamos a considerar el operador K actuando en el espacio E. Para elllo, hemos de demostrar que si $y \in E$ entonces $Ky \in E$.

Veamos primero que Ky es continua: esto se deduce de la acotación

$$|Ky(t_1) - Ky(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s)) \, ds \right| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} M \, ds \right| = M|t_2 - t_1|$$

(que dice Ky satisface una condición de Lipschitz)

Veamos ahora que $Ky \in E$. De hecho:

$$|Ky(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, ds \right| \leq M|t - t_0|$$

Para concluir la prueba del teorema de existencia y unicidad, es suficiente probar que si el intervalo (a, b) es suficientemente pequeño, K es un operador de contracción. Para ello tomemos $y_1, y_2 \in E$ y acotemos:

$$|Ky_1(t) - Ky_2(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s)) ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y_2(s)) \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \right|$$

Utilizando entonces la hipótesis de que f satisface una condición de Lipschitz, encontramos que:

$$|Ky_1(t) - Ky_2(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} L|y_1(s) - y_2(s)| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} L \, d(y_1, y_2) ds \right| \leq L|t - t_0| \, d(y_1, y_2)$$

Entonces tomando supremo para $y \in [a, b]$ encontramos que:

$$d(Ky_1, Ky_2) \leq L \max\{b - t_0, t_0 - a\} \, d(y_1, y_2)$$

Deducimos que K es una contracción si $\alpha = L \max b - t_0, t_0 - a < 1$, lo cual puede lograrse eligiendo a, b suficientemente próximos a t_0.

1.3 El intervalo maximal de existencia

Notemos que en general puede ocurrir que la solución del problema de valores iniciales (1) sólo exista en un entorno de t_0. Para ello, consideremos el siguiente ejemplo (con $n = 1$):

$$\begin{cases} y' &= 1 + y^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Utilizando el método de separación de variables, podemos hallar explícitamente la solución:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = dt \Rightarrow \arctan y = t + C$$

Pero $C = 0$ pues buscamos una solución con $y(0) = 0$, en consecuencia:

$$y(t) = \tan t$$

es la solución. Notemos sin embargo que la solución sólo existe en un intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ alrededor de $t_0 = 0$.

En cambio veremos que la unicidad no es una propiedad local, es decir dos soluciones de (1) en un intervalo I, coinciden necesariamente sin importar cual es la longitud de I:

Proposición 1.5 *Sean $y_1(t)$ e $y_2(t)$ dos soluciones del problema de valores iniciales (1) en un intervalo I con $t_0 \in I$ y f localmente Lipschitziana. Entonces $y_1(t) = y_2(t)\, \forall t \in I$*

Dem: Consideramos el conjunto

$$J = \{t \in I : y_1(t) = y_2(t)\}$$

Es claro que J es no vacío pues $t_0 \in I$ y como y_1, y_2 son continuas, J es cerrado en I. Veamos que J es abierto: en efecto si $t_1 \in J$, entonces por el teorema local de existencia y unicidad, existe un $\delta > 0$ tal que en el intervalo $(t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ hay una única solución de (1). Entonces $y_1(t) = y_2(t)\, \forall t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$, es decir que $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subset J$.

Pero entonces $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subset J$.

Esto prueba que J es abierto. Como I es conexo, concluimos que $J = I$, o sea que $y_1(t) = y_2(t)\, \forall t \in I$.

La proposición anterior permite definir el intervalo maximal de existencia para (1) como el mayor intervalo abierto $I = (t_*, t^*)$ tal que $t_0 \in I$ en el que hay definida una solución de (1), o lo que es lo mismo como la unión de todos los intervalos abiertos que contienen a t_0 en los que hay definida una solución.

2 El flujo asociado a una ecuación diferencial

Sea $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función localmente Lipschitziana. Podemos definir entonces el flujo $\phi_{t_1,t_0}(\cdot)$ desde el instante t_0 al instante t_1, asociado a la ecuación diferencial $y'(t) = f(t, y(t))$, del siguiente modo: tomemos $y_0 \in \Omega$ entonces $\phi_{t_0,t_1}(y_0)$ se define por $\phi_{t_0,t_1}(y_0) = y(t_1)$ siendo $y(t)$ la única solución del problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{rcc} y' & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \tag{3}$$

Naturalmente $\phi_{t_0,t_1}(y_0)$ sólo está definido si t_1 es suficientemente próximo a t_0 (ya que la solución puede existir solamente en un entorno de t_0). De la definición del flujo y la unicidad de solución, se deduce que el flujo posee las siguientes propiedades:

$$\phi_{t_0,t_0} = Id$$

$$\phi_{t_1,t_2} \circ \phi_{t_0,t_1} = \phi_{t_0,t_2}$$

(si t_1, t_2 son suficientemente próximos a t_0). En el caso particular en que f no depende del tiempo (sistema autónomo), se puede demostrar que:

$$\phi_{t_1,t_2} = \phi_{0,t_2-t_1}$$

(o sea que el flujo ϕ_{t_1,t_2} sólo depende de la longitud del intervalo de tiempo $t_2 - t_1$). Llamando entonces si cambiamos ligeramente la notación, escribiendo $\phi_t = \phi_{0,t}$ encontramos que:

$$\phi_0 = Id$$

$$\phi_{t_2} \circ \phi_{t_1} = \phi_{t_1+t_2}$$

$$\phi_{t_1}^{-1} = \phi_{-t_1}$$

Estas propiedades son válidas si t_1, t_2 son suficientemente pequeño. Se dice que $\{\phi_t\}$ es un grupo local a un parámetro, o una acción local a un parámetro.

Notamos que en el caso en que las soluciones de (3) estén definidas globalmente (o sea para todo t), las funciones $\phi_t : \Omega \to \Omega$ forman un grupo con respecto a la operación de composición de funciones. Además la aplicación $t \to \phi_t$ es un morfismo de grupos (con el grupo aditivo de los reales como dominio).

En esta sección probaremos que el flujo asociado a una ecación diferencial es una función diferenciable.

2.1 Lema de Gronwal

El siguiente lema nos será de utilidad para estudiar las propiedades del flujo.

Lema 2.1 *Sean $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones no negativas tales que para $\alpha \geq 0$ satisfacen:*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(\tau)v(\tau)\, d\tau$$

entonces

$$u(t) \leq \alpha \exp \int_a^t v(\tau)\, d\tau$$

En particular si $\alpha = 0$, entonces $u \equiv 0$.

Dem: Supongamos primero $\alpha > 0$. Llamemos

$$w(t) = \alpha + \int_a^t u(\tau)v(\tau)\, d\tau$$

Entonces por el teorema fundamental del cálculo:

$$w'(t) = u(t)v(t) \leq w(t)v(t)$$

en consecuencia:

$$\log\, w(t) - \log\, w(a) = \int_a^t \frac{w'(\tau)}{w(\tau)} d\tau \leq \int_a^t v(t)\, dt$$

Tomando exponencial obtenemos que:

$$u(t) \leq \alpha \exp \int_a^t v(\tau)\, d\tau$$

(Si $\alpha = 0$ el resultado se obtiene por un proceso de límite).

2.2 Dependencia Continua

El siguiente lema dice que la solución depende con continuidad de la condición inicial y_0:

Lema 2.2 *Sean y e $\tilde{y}$ soluciones de la ecuación diferencial:*

$$y' = f(t, y(t))$$

con las condiciones iniciales

$$y(t_0) = y_0$$
$$\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$$

respectivamente en el intervalo $[a, b]$, siendo f una función Lipschitz entonces:

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq e^{L|t-t_0|}\, \forall t \in [a, b]$$

donde L es la constante de Lipschitz de f.

Dem: Como antes, escribamos la ecuación en forma integral:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y} + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$$

Entonces restando, tenemos que:

$$|y(s) - \tilde{y}(s)| \leq |y_0 - \tilde{y}| + \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))| ds$$

$$\leq |y_0 - \tilde{y}_0| + L \int_{t_0}^{t} |y(s) - \tilde{y}(s)| dt$$

Aplicamos entonces el lema de Gronwal con $\alpha = |y_0 - \tilde{y}_0|$, $u(t) = |y(t) - \tilde{y}(t)|$ y $v(t) \equiv L$. Deducimos que

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| e^{L|t-t_0|}$$

Por consiguiente el flujo asociado a una ecuación diferencial es una función continua.

2.3 Un lema de unicidad

Como corolario de la desigualdad anterior, vamos a probar un lema que nos será util en la sección siguiente:

Lema 2.3 *Sean $y_1(t), y_2(t)$ dos soluciones de una ecuación diferencial $y' = f(t, y(t))$ en un intervalo $I = (a, b)$, siendo f Lipschitz y supongamos que existe una sucesión $(t_n) \in I$ tal que $t_n \to b$ y*

$$\lim_{n \to \infty} |y_1(t_n) - y_2(t_n)| = 0$$

entonces $y_1(t) = y_2(t)\, \forall t \in I$. Entonces $y_1(t) = y_2(t)\, \forall t \in I$

Notamos que en principio $y_1(t)$ e $y_2(t)$ no están definidas si $t = b$, por ello no podemos decir que $y_1(b) = y_2(b)$ y aplicar la proposición (1.5). Para probar el lema, escribimos la ecuación en forma integral en el intervalo $[t_n, t]$ siendo $t \in I$:

$$y_1(t) = y_1(t_n) + \int_{t_n}^{t} f(s, y_1(s))\, ds$$

$$y_2(t) = y_2(t_n) + \int_{t_n}^{t} f(s, y_2(s)) ds$$

Entonces haciendo la misma cuenta de antes encontramos que:

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \alpha_n e^{L|t-t_n|}$$

siendo $\alpha_n = |y_1(t_n) - y_2(t_n)|$ y L la constante de Lipschitz de f. Ahora si fijamos t y hacemos tender $n \to \infty$, como $\alpha_n \to 0$ por hipótesis, encontramos que $y_1(t) = y_2(t)$.

3 Caracterización del tiempo de exploción (blow-up)

Surge la pregunta de como podemos caracterizar el tiempo t^* hasta el cual existe la solución. Este es el contenido de la siguiente proposición:

Proposición 3.1 *Sea $y(t) : I \to \mathbb{R}^n$ una solución de (1) definida en el intervalo maximal de existencia $I = (t_*, t^*)$. Entonces si $K \subset \Omega$ es una compacto, no puede existir una sucesión (t_n) tal que $t_n \to t^*$ e $y(t_n) \in K \, \forall n$ En particular si $\Omega = \mathbb{R}^n$ vemos que*

$$\lim_{t \to t^*} |y(t)| = +\infty$$

Análogamente:

$$\lim_{t \to t_*} |y(t)| = +\infty$$

Dem: Supongamos por el absurdo que existiera una sucesión $(t_n)_{n \to \mathbb{N}}$ con $t_n \to t^*$ tal que $y(t_n) \in K$. Entonces como K es compacto, podemos extraerle una subsucesión convergente (y_{n_k}). Digamos que $y_{n_k} \to y^*$. Entonces podemos considerar otro problema de valores iniciales para la misma ecuación:

$$\begin{cases} y_2'(t) &= f(t, y_2(t)) \\ y_2(t^*) &= y^* \end{cases}$$

Por el teorema de existencia y unicidad local, existe un $\delta > 0$ tal que este problema posee una única solución en el intervalo $(t^* - \delta, t^* + \delta)$. Definamos entonces una función $y_3(t)$ del siguiente modo

$$y_3(t) = \begin{cases} y(t) & \text{si} \quad t_* < t < t^* \\ y_2(t) & \text{si} \quad t^* < t < t^* + \delta \end{cases}$$

Notamos que

$$\lim_{k \to \infty} |y(t_{n_k}) - y_2(t_{n_k})| = 0$$

y que ambas soluciones $y(t)$, $y_2(t)$ están definidas en el intervalo $I = (t^* - \delta, t^*)$. Por el lema 2.3, concluimos que $y_1(t) = y_2(t)$ en el intervalo $(t^* - \delta, t^*)$. Entonces vemos que $y_3(t) \in C^1$ y es una solución de la ecuación diferencial en el intervalo $(t_*, t^* + \delta)$ con la condición inicial $y_3(t_0) = y_0$. Esto contradice la hipótesis de que t^* era el tiempo maximal de existencia.