Función de Green

Asumiremos que el operador diferencial está en forma de divergencia:

$$L[u] = (-pu')' + qu$$

con $p \in C^1[a,b]$, $p > 0$ y $q \in C[a,b], q \geq 0$.

El problema es, dada una $\varphi \in C[a,b]$ encontar u tal que:

$$\begin{cases} L[u](t) = \varphi(t) & t \in (a,b) \\ \mathcal{B}[u] = 0 & \end{cases}$$

Con $\mathcal{B}$ un operador que indica las condiciones de borde. Por ejemplo:

$$\mathcal{B}[u] = \begin{cases} u(a) \\ u(b) \end{cases} \qquad \mathcal{B}[u] = \begin{cases} u(a) - u(b) \\ u'(a) - u'(b) \end{cases} \qquad \mathcal{B}[u] = \begin{cases} \alpha u(a) + \beta u(b) \\ \gamma u'(a) + \delta u'(b) \end{cases}$$

Hay que notar, sin embargo que no para todas las condiciones de borde habrá solucion. Por ejemplo, si se piden condiciones periódicas, el forzante tendrá que ser periódico también.

Afirmamos que u está dada por:

$$u(t) = \int_a^b G(t,s)\varphi(s)ds.$$

con $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ la llamada Función de Green.

Notar las siguientes propiedades que deberá cumplir G. (Tomamos el primer ejemplo de condiciones de borde, Dirichlet Homogeneas.)

1. Como $u(a) = u(b) = 0$ entonces $\int_a^b G(a,s)\varphi(s)ds = \int_a^b G(b,s)\varphi(s)ds$. Como esto será cierto para cáda función continua φ y $C[a,b]$ es denso en $L^2[a,b]$, se tiene que:

$$G(a,s) \equiv G(b,s) \equiv 0$$

   Es decir, $G(\cdot, s)$ también cumple con las condiciones de borde.

2. Como el operador L es autoadjunto para el producto inteno de L^2, se tiene que G es simétrica:

$$\int_a^b \int_a^b G(t,s)\varphi(s)\psi(t)dsdt = \int_a^b \left(\int_a^b G(t,s)\varphi(s)ds \right) \psi(t)dt = \int_a^b u(t)\psi(t)dt =$$

$$= \int_a^b u(t)L[K[\psi]](t)dt$$

En dónde $LK = Id$. Llamando $v(t) = K[\varphi](t)$, tenemos, usando que L es autoadjunto ($\langle u, Lv\rangle = \langle Lu, v\rangle$)

$$\int_a^b \int_a^b G(t,s)\varphi(s)\psi(t)dsdt = \int_a^b L[u](t)v(t)dt = \int_a^b \varphi(t)\left(\int_a^b G(t,s)\psi(s)ds\right)dt =$$

$$= \int_a^b \int_a^b G(t,s)\varphi(t)\psi(s)dsdt$$

Con lo cual, como esto vale paa todo φ, ψ, se tiene que $G(s,t) = G(t,s)$ en el dominio.

3. $G \in C^1(\{(x,s) \in [a,b]\times[a,b] : x \neq s\})$ y en $x = s$ la derivada pegará un salto:

$$u(t) = \int_a^t G(t,s)\varphi(s)ds + \int_t^b G(t,s)\varphi(s)ds$$

$$u'(t) = G(t,t_-)\varphi(t_-) + \int_0^t \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\varphi(s)ds - G(t,t_+)\varphi(t_+) + \int_t^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\varphi(s)ds$$

Ahora, como φ es continua, pidiendo la continuidad de G, $G(t,t_-) = G(t,t_+)$:

$$u'(t) = \int_a^t \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\varphi(s)ds + \int_t^b \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\varphi(s)ds$$

Derivando nuevamente:

$$u''(t) = \frac{\partial G(t,t_-)}{\partial t}\varphi(t_-) + \int_0^t \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}\varphi(s)ds - \frac{\partial G(t,t_+)}{\partial t}\varphi(t_+) + \int_t^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\varphi(s)ds$$

Pedimos que el salto sea $\frac{\partial G(t,t_-)}{\partial t} - \frac{\partial G(t,t_+)}{\partial t} = -\frac{1}{p(t)}$ tenemos:

$$u''(t) = -\frac{\varphi(t)}{p(t)} + \int_0^t \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}\varphi(s)ds + \int_t^1 \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}\varphi(s)ds$$

Veamos entonces que $L[u] = -(pu')' + qu = f$, abusando un poco la notación escribiremos $\int_a^b Gds = \int_a^t Gds + \int_t^b Gds$ sabiendo que la G se comporta distinto en cada caso.

$$\left[-(pu')' + qu\right](t) = -p(t)u''(t) - p'(t)u'(t) + q(t)u(t) =$$

$$= -\frac{p(t)\varphi(t)}{p(t)} - p(t)\int_0^1 \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}\varphi(s)ds - p'(t)\int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\varphi(s)ds + q(t)\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)ds$$

$$Lu(t) = \varphi(t) + \int_a^b \left[-p(t)\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} - p'(t)\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} + q(t)G(t,s) \right] \varphi(s)ds =$$

$$= \varphi(t) + \int_a^b L_t[G](t,s)\varphi(s)ds = \varphi(t)$$

pidiendo que $L_t[G] \equiv 0$ fuera de la diagonal

Pasando en limpio, la función G depende de dos variables y tiene las siguientes propiedades: si $t \in (a,b)$, entonces $G(t,s)$, $\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}$ existen para $a < t < s$ y para $s < t < b$. Supongamos, además, que estas derivadas tienen una extensión continua en las regiones triangulares $a \leq t \leq s$ y $s \leq t \leq b$. El efecto de esta ampliación es que

$$\frac{\partial G(s_+,s)}{\partial t} = \frac{\partial G(s,s_-)}{\partial t}, \frac{\partial G(s_-,s)}{\partial t} = \frac{\partial G(s,s_+)}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 G(s_+,s)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 G(s,s_-)}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 G(s_-,s)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 G(s,s_+)}{\partial t^2}$$

En la diagonal $t = s$, insistimos que $G(t,s)$ es continua. Para la derivada parcial $\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}$ sin embargo, necesitamos un salto de discontinuidad.

En resumen, $u(t) = \int_a^b G(t,s)\varphi(s)ds$ con con G tal que

1. $L_t[G](t,s) = 0$ para $a < t < s$ y para $s < t < b$
2. $\mathcal{B}[G] = 0$: cumple las condiciones de borde.
3. $G \in C([a,b] \times [a,b])$. En particular en $t = s$, con lo cual $G(s_-,s) = G(s_+,s)$
4. $G \in C^1([a,b] \times [a,b] \backslash \{t = s\})$, y pega un salto: $\frac{\partial G(s_-,s)}{\partial t} - \frac{\partial G(s_+,s)}{\partial t} = \frac{1}{p(t)}$.

Encontrar una G a mano

Sea el problema:

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t) & t \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

1) En primer lugar, sabemos que $G_t'' \equiv 0$ fuera de la diagonal, con lo cual:

$$G(t,s) = \begin{cases} at + b & t \leq s \\ ct + d & t > s \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que a, b, c, d pueden depender de s.

2) Luego, debemos utilizar las condiciones de bode:

$G(0,s) = 0$, como $0 \leq s$ obtenemos que $b = 0$.

$G(1,s)=0$, como $1<s$ obtenemos que $c+d=0$, o $c=-d$.

con lo cual hasta ahora tenemos:

$$G(t,s)=\begin{cases} at & t\leq s \\ d(1-t) & t>s \end{cases}$$

3) Usamos ahora la continuidad en la diagonal $G(s_-,s)=G(s_+,s)$

$$as=d(1-s)$$

4) y el salto de la derivada $G_t(s_-,s)-G_t(s_+,s)=\frac{1}{p(t)}$:

$$a-(-d)=1$$

Obtenemos $d=s$ y $a=1-s$. Con lo cual llegamos a la expesión de la función de Green:

$$G(t,s)=\begin{cases} (1-s)t & t\leq s \\ s(1-t) & t>s \end{cases}$$

Veamos que anda en un ejemplo sencillo, $\varphi\equiv 1$:

La solución de $-u''=1$, con condiciones Dirichlet Homogeneas es $u(t)=\frac{1}{2}(t-t^2)$.

Veamos que también se podía llegar mediante la función de Green:

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)ds=\int_0^t s(1-t)ds+\int_t^1(1-s)tdt=$$
$$=\left(\frac{s^2}{2}(1-t)\right)\Big|_0^t+\left(ts-t\frac{s^2}{2}\right)\Big|_t^1=\left(\frac{t^2}{2}(1-t)\right)+\left(t-\frac{t}{2}\right)-\left(t^2-\frac{t^3}{2}\right)=\frac{1}{2}(t-t^2)$$

Otro Ejemplo

En general, el problema de encontrar la función de Green se reduce a resolver un sistema de cuatro incógnitas a,b,c,d que dependen de s, dadas las 4 propiedades que tiene que cumplir. Dos de borde, la continuidad y el salto de la derivada:

Veamos en un ejemplo sencillo que resolver el sistema puede ser tarea tediosa:

$$\begin{cases} -u''(t)+u(t)=f(t) & t\in(0,1) \\ u(0)=u(1); \qquad u'(0)=u'(1) \end{cases}$$

Aquí el operador viene dado por $L[u]=-u''+u$, con lo cual $p,q\equiv 1$. Las soluciones del sistema $Lt=0$ vienen dadas por $g(t)=Ae^t+Be^{-t}$.

Veamos entonces cómo haríamos para encontrar la

$$G(t,s)\begin{cases} ae^t+be^{-t} & t\leq s \\ ce^t+de^{-t} & t>s \end{cases}$$

1) Condición de borde: $G(0,s) = G(1,s)$ entonces $a + b = ce + de^{-1}$.

2) Condición de borde: $G_t(0,s) = G_t(1,s)$ entonces $a - b = ce - de^{-1}$.

3) Continuidad en $s = t$: $G(s_+, s) = G(s_-, s =$ entonces $ae^s + be^{-s} = ce^s + de^{-s}$.

4) Salto de la derivada: $G_t(s_-, s) - G(s_+, s) = 1$ entonces $(ae^s - be^{-s}) - (ce^t - de^{-t}) = 1$

Con lo cual queda un sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -e & -e^{-1} \\ 1 & -1 & -e & e^{-1} \\ e^s & e^{-s} & -e^s & -e^{-s} \\ e^s & -e^{-s} & -e^s & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que se puede hacer las cuentas y resolver, pero dá la pauta que complicando un poco las condiciones de borde o el operador, va a terminar siendo un dolor de cabeza.

Veamos un método que aprovecha más las condicones de borde:

Método del Wronskiano

Volvamos a $Lu = -u''$ y supongamos condiciones de borde Dirichlet homogeneas. Elijamos una base $\{u_1, u_2\}$ del núcleo del operador L tales que

$$u_1(0) = 0, u_1(1) \neq 0, \qquad u_2(0) \neq, u_2(1) = 0$$

Por ejemplo en este caso podrían ser $u_1(t) = t$, $u_2(t) = 1 - t$.

Ahora, construir G como sigue:

$$G(t,s) = \begin{cases} Au_1(t) + Bu_2(t) & t \leq s \\ Cu_1(t) + Du_2(t) & t > s \end{cases}$$

Aplicando las condiciones de borde, se tiene que $Bu_2(0) = 0$ y $0 = Cu_1(1)$. Con lo cual $B = 0$ y $C = 0$. En general, siguiendo esta filosofía, para cualquier condición de borde, dos de las 4 incógnitas quedan determinadas de antemano.

La condición de continuidad y la del salto de la derivada nos dan las ecuaciones:

$$0 = G(s_+, s) - G(s_-, s) = Du_2(s) - Au_1(s)$$
$$-\frac{1}{p(s)} = \frac{\partial G(s_+, s)}{\partial t} - \frac{\partial G(s_-, s)}{\partial t} = Du_2'(s) - Au_1'(s)$$

.

De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$A = -\frac{u_2(s)}{p(s)W(s)}$$

y

$$D = -\frac{u_1(s)}{p(s)W(s)}$$

en donde W es el Wronskiano de u_1 y u_2:

$$W(s) = \begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1'(s) & u_2'(s) \end{vmatrix}$$

Finalmente la G resulta:

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{u_2(s)}{p(s)W(s)} u_1(t) & t \leq s \\ -\frac{u_1(s)}{p(s)W(s)} u_2(t) & s < t \end{cases}$$

Vale recordar la fórmula, que si $T[u] = u'' + Pu' + Qu$ entonces, si c pertenece al dominio:

$$W(s) = W(c)e^{-\int_c^s P(t)dt}$$

Con lo cual, en los ejemplos de $L[u] = -(pu') + qu = -pu'' + p'u' + qu$, si p es constante, $P = 0$, con lo cual $W(s) = W(c)$ para todo s.

Finalmente, si llamamos $\overline{W} = pW$, que vimos que es constante:

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{1}{\overline{W}} u_2(s)u_1(t) & t \leq s \\ -\frac{1}{\overline{W}} u_1(s)u_2(t) & s < t \end{cases}$$

Esta técnica es bastante diecta y ahorra muchas cuentas.

Manuel Maurette

Septiembre 2009-1ra versión