Funcion de Green

1- Definicion de la funcion de Green:

Def.: Consideremos un problema de Sturm-Liouville de la forma

$$\begin{cases} L(y) = -(py')' + qy = r \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

la función de Green para este problema es una función $G(t,\xi)$ definida para $(t,\xi) \in [a,b] \times [a,b]$ tal que para cada $\xi \in [a,b]$ fijo $G(t,\_)$ es una solución (en el sentido de distribuciones) de

$$\begin{cases} L(y) = -(py')' + qy = \delta_\xi \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

aquí δ_ξ ("delta de Dirac concentrada en ξ")
es la distribución definida para $\varphi \in C_o^\infty(I)$ por $\delta_\xi(\varphi) = \varphi(\xi)$
($I = [a,b]$)
la condición $L(y) = \delta_\xi$ significa que si $\varphi \in C_o^\infty(I)$ tenemos
$< L(y),\varphi > = \delta_\xi(\varphi)$
o sea que (usando que L es autoajunto)
$< y,L(\varphi) > = \varphi(\xi)$ (3)

si se encuentra $G(x,\xi)$ es posible resolver el (formalmente) problema para cualquier r poniendo

$$y(t) = \int_a^b r(\xi)\, G(t,\xi)\, d\xi$$

pues

$$L[y](t) \int_a^b r(\xi)\, L[G(t,\_)](t)\, d\xi = \int_a^b r(\xi)\, \delta_\xi(t)\, d\xi = r(t)$$

(más adelante justificaremos esto rigurosamente)
Por lo tanto haremos la suposición (× teo. de la alternativa) de que el problema de Dirichlet homogéneo:

$$\begin{cases} L(y) = -(py')' + qy = r \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

tiene como única solución $y = 0$

Ejemplo 1.1: Consideremos el problema de Sturm-Liouville más sencillo

$$\begin{cases} y'' = r \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \qquad (\ p = -1,\ q = 0)$$

buscamos pues una solución distribucional de

$$\begin{cases} y'' = \delta_\xi \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

para cada $\xi \in [0,1]$

Una primitiva de δ_ξ es la función de Heavside H_ξ dada por

$$H_\xi(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < \xi \\ 1 \text{ si } t \geqslant \xi \end{cases}$$

la afirmación de que $H_\xi' = \delta_\xi$ significa que si $\varphi \in C_o^\infty(I)$ tenemos

$$\int_I H_\xi(t)\ \varphi'(t)\ dx = \int_\xi^1 \varphi'(t)\ dt = \varphi'(1) - \varphi'(\xi) = -\varphi'(\xi) = -\ \delta(\xi)$$

$$(\text{"} -\int_I \varphi(x)\ \delta_\xi(x)\ dx \text{"})$$

desde luego cualquier función de la forma

$$H_\xi(t) + a = \begin{cases} \alpha \quad \text{ si } t < \xi \\ \alpha+1 \text{ si } t \geqslant \xi \end{cases}$$

es también una primitiva de δ_ξ

por lo tanto una solucion de $y'' = \delta_\xi$ es:

$$y(t) = \int_0^t H_\xi(x)\ dx = \int_0^t \alpha\ dt = \alpha t \text{ si } t < \xi$$

$$y(t) = \int_0^t H_\xi(x)\ dx = \int_0^\xi \alpha\ dx + \int_\xi^t \alpha+1\ dx = \alpha\xi + (\alpha+1).(t-\xi) =$$

$$= \alpha\xi + \alpha t + t - \alpha\xi - \xi = \alpha t + t - \xi$$

queremos que $y(1) = \alpha + 1 - \xi = 0 \Rightarrow$ elejimos $\alpha = \xi - 1$

$$\Rightarrow y(t) = (\xi-1)t + t - \xi = \xi t - t + t - \xi = \xi\ (t-1)$$

con lo que queda

$$G(t,\xi) = \begin{cases} t(\xi-1) \text{ si } t < \xi \\ \xi(t-1) \text{ si } t \geqslant \xi \end{cases}$$

con lo que la solución del problema es:

$$y(t) = \int_I r(\xi)\ G(\xi,t)\ d\xi = \int_o^t r(\xi)\ \xi\ (t-1)\ d\xi + \int_t^1 t(\xi-1)\ r(\xi)\ d\xi$$

$$= (t-1) \int_o^t r(\xi)\ \xi\ d\xi + t \int_t^1 (\xi-1)\ r(\xi)\ d\xi$$

de hecho

$$y'(t) = (t-1)\ r(t)\ t + \int_o^t r(\xi)\ \xi\ d\xi + \int_t^1 (\xi-1)\ r(\xi)\ d\xi - t\ (t-1).r(t)$$

$$= \int_0^1 r(\xi)\,\xi\, d\xi - \int_t^1 r(\xi)\, d\xi$$

con lo que: $y''(t) = r(t)$ y claramente $y(0) = y(1) = 0$

2- Construccion de la funcion de Green para un problema de Sturm-Liouville

Vamos ahora a ver como se construye en general la función de Green para un problema de Sturm-Liouville dado:

dado $\xi \in [a,b]$ buscamos y que sea solución distribucional de

$$\begin{cases} L(y) = -(py')' + qy = \delta_\xi \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

como "$\delta_\xi = 0$" en el intervalo $[a,\xi)$

(lo que significa que si $sop(\varphi) \subseteq [a,\xi] \Rightarrow \delta_\xi(\varphi) = 0$] es razonable que en el intervalo $[a,\xi)$ y debe coincidir con una función y_1 que cumpla:

$$\begin{cases} L(y_1) = 0 \\ y_1(a) = 0 \end{cases} \qquad (A)$$

como $\delta_\xi = 0$ en $(\xi,b]$ es razonable que en el intervalo $(\xi,b]$ y debe coincidir con una solución de un problema de Cauchy:

$$\begin{cases} L(y_2) = 0 \\ y_2(a) = 0 \end{cases} \qquad (B)$$

así pues tenemos que

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } a \leqslant x < \xi \\ y_2(x) & \text{si } \xi < x \leqslant b \end{cases}$$

veamos que debemos pedir para que se vefique $L(y) = \delta_\xi$

tomemos $\varphi \in C^\infty(I)$

$$< L(\varphi), y > = \int_a^b (-p\varphi')'y + q\varphi y\, dx =$$

$$= \int_a^\xi (-p\varphi')'y_1 + q\,\varphi\, y_1\, dx + \int_\xi^b (-p\varphi')'y_2 + q\,\varphi\, y_2\, dx =$$

integrando por partes:

$$= (-p\,\varphi'\,y_1)\Big|_a^\xi + (-p\,\varphi'\,y_2)\Big|_\xi^b + \int_a^\xi p\,\varphi' y_1' + q\,\varphi\, y_1 dx + \int_\xi^b p\,\varphi' y_2' + q\,\varphi\, y_2\, dx =$$

$$= p(a)\,\varphi'(a)\,y_1(a) - p(\xi)\,\varphi'(\xi)\,y_1(\xi) + p(\xi)\,\varphi'(\xi)\,y_2(\xi) - p(b)\,\varphi'(b)\,y_2(b)$$

$$+ \int_a^{\xi} p\ \varphi' y_1' + q\ \varphi\ y_1 dx + \int_{\xi}^{b} p\ \varphi' y_2' + q\ \varphi\ y_2\ dx$$

pidamos que $y_1(\xi) = y_2(\xi)$ (C)

con esto desaparecen los términos de borde (ya que $y_1(a) = y_2(b) = 0$) y

resulta y continua definiendo $y(\xi) = y_1(\xi) = y_2(\xi)$

queda:

$$< L(\varphi), y > = \int_a^{\xi} p\ y_1'\ \varphi' + q\ y_1\ \varphi\ dx + \int_{\xi}^{b} p\ y_2'\ \varphi' + q\ \varphi\ y_2\ dx =$$

$$= p\ y_1'\ \varphi \Big|_a^{\xi} + p\ y_2'\ \varphi \Big|_{\xi}^{b} - \int_a^{\xi} (p\ y_1')'\ \varphi + q\ y_1\ \varphi\ dx - \int_{\xi}^{b} (p\ y_2')'\varphi + q\ \varphi\ y_2\ dx$$

$$= p(\xi)\ y_1'(\xi)\ \varphi(\xi) - p(a)\ y_1'(a)\ \varphi(a) + p(b)\ y_2'(b)\ \varphi(b) - p(\xi)\ y_2'(\xi)\ \varphi(\xi)$$

$$+ \int_a^{\xi} L(y_1)\ \varphi\ dx + \int_{\xi}^{b} L(y_2)\varphi\ dx$$

teniendo en cuenta que $L(y_1) = L(y_2) = 0$ y que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ queda

$$< L(\varphi), y > = p(\xi)\ y_1'(\xi)\ \varphi(\xi) - p(\xi)\ y_2'(\xi)\ \varphi(\xi)$$

como queremos que $< L(\varphi), y > = \varphi(\xi)$ [condición (3)]

debemos pedir que

$$y_1'(\xi) - y_2'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)} \qquad \text{(D)}$$

Veamos que es posible elegir y_1 e y_2 que satisfagan (A),(B),(C) y (D)

Para ello comencemos hallando dos soluciones ψ_1 e ψ_2 de los problemas de Cauchy:

$$\begin{cases} L(\psi_1) = 0 \\ \psi_1(a) = 0\ \ \psi_1'(a) = \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(\psi_2) = 0 \\ \psi_2(b) = 0\ \ \psi_2'(b) = \beta \neq 0 \end{cases}$$

claramente $\psi_1 \neq 0$, $\psi_2 \neq 0$

se afirma que ψ_1 e ψ_2 son linealmente independientes: es suficiente ver que el wronskiano es no nulo en punto (y por lo tanto en todos)

$$W(a) = \begin{vmatrix} \psi_1(a) & \psi_2(a) \\ \psi'_1(a) & \psi'_2(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \psi_2(a) \\ \alpha & \psi'_2(a) \end{vmatrix} = -\psi_2(a)\,\alpha$$

debe ser $\psi_2(a) \neq 0$ sino ψ_2 sería una solución no nula del

problema homogéneo (4)

$\Rightarrow$ son una base de Nu(L) es decir todas las soluciones de $L(y) = 0$ son

de la forma $y = c_1\,\psi_1 + c_2\,\psi_2$ con c_1, c_2 constantes

debe ser $y_1 = d_1\,\psi_1$ (para que $y_1(a) = 0$) $y_2 = d_2\,\psi_2$ (para que $y_2(a) = 0$)

$\Rightarrow y_1(\xi) = d_1\,\psi_1(\xi) = d_2\,y_2(\xi) = y_2(\xi)$

la condición (D) da $d_1\,\psi'_1(\xi) - d_2\,\psi'_2(\xi) = \dfrac{1}{p(\xi)}$

así pues d_1, d_2 deben ser soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} d_1\,\psi_1(\xi) - d_2\,\psi_2(\xi) = 0 \\ d_1\,\psi'_1(\xi) - d_2\,\psi'_2(\xi) = \dfrac{1}{p(\xi)} \end{cases}$$

el determinante es

$$\begin{vmatrix} \psi_1(\xi) & -\psi_2(\xi) \\ \psi'_1(\xi) & -\psi'_2(\xi) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \psi_1(\xi) & \psi_2(\xi) \\ \psi'_1(\xi) & \psi'_2(\xi) \end{vmatrix} = -W(\xi)$$

que justamente es no nulo

resolvemos entonces el sistema por la regla de Cramer:

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\psi_2(\xi) \\ \dfrac{1}{p(\xi)} & -\psi'_2(\xi) \end{vmatrix}}{-W(\xi)} = \frac{\psi_2(\xi)}{-p(\xi)\,W(\xi)} = -\frac{\psi_2(\xi)}{\overline{W}}$$

donde $\overline{W} = p(x)\,W(x)$ es constante

$$d_2 = \frac{\begin{vmatrix} \psi_1(\xi) & 0 \\ \psi'_1(\xi) & \dfrac{1}{p(\xi)} \end{vmatrix}}{-W(\xi)} = \frac{\psi_1(\xi)}{-p(\xi)\,W(\xi)} = -\frac{\psi_1(\xi)}{\overline{W}}$$

con lo que finalmente obtenemos para la función de Green la expresión:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\varphi_2(\xi)\varphi_1(x)}{\overline{W}} & \text{si } x < \xi \\[2ex] -\dfrac{\varphi_1(\xi)\varphi_2(x)}{\overline{W}} & \text{si } x \geqslant \xi \end{cases}$$

Así por lo que hemos visto la función de Green se caracteriza por las siguientes propiedades

Para cada $\xi \in [a,b]$:

<u>1)</u> $G(a,\xi) = G(b,\xi) = 0$

<u>2)</u> Para x en los intervalos (a,ξ) y (ξ,b) G es C^2 como función de x y

$$L(G(x,\xi)) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) \right) + q(x)\, G(x,\xi) = 0$$

<u>3)</u> $G(x,\xi)$ es continua como función de x para cada ξ

<u>4)</u> En el punto $x = \xi$ la derivada parcial $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,\xi)$ tiene una discontinuidad de salto y se verifica:

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ x < \xi}} \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) - \lim_{\substack{x \to \xi \\ x > \xi}} \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) = \frac{1}{p(\xi)}$$

Además hemos visto que vale

<u>5)</u> La función de Green es simétrica: $G(x,\xi) = G(\xi,x)$

<u>Ejemplo:</u> para el problema antes considerado $\varphi_1(t) = t$ $\varphi_2(t) = t-1$

$$p = -1 \text{ y } \overline{W} = \begin{vmatrix} t & t-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = t - (t-1) = 1$$

<u>Teorema:</u> Sea $r(x)$ continua en $[a,b]$ entonces

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

es la (única) solución del problema

$$\begin{cases} L(y) = -(py')' + qy = r \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

Dem: No es lícito derivar a lo bruto bajo el signo de integral dado que el integrando no tiene derivada continua en $x = \xi$

$$y(x) = \int_a^x G(x,\xi)\, r(\xi)\, d\xi + \int_x^b G(t,\xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

para derivar esto respecto de x consideramos la función

$$F(x,u) = \int_a^u G(t,\xi)\, r(\xi)\, d\xi \qquad f(x) = F(x,x) = \int_a^x G(x,\xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

$$f'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial F}{\partial x}(x,x)\frac{\partial u}{\partial x} = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi)\, r(\xi)\, d\xi + G(t,t)\, r(x)$$

procediendo de manera análoga con el otro miembro queda:

$$y'(t) = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi)\, r(\xi)\, d\xi + G(x,x)\, r(x) +$$

$$+ \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi)\, r(\xi)\, d\xi - G(x,x)\, r(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

resultado que coincide con el que se obtendría derivando directamente bajo el signo de integral, sin embargo si derivamos de nuevo:

$$y''(t) = \int_a^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,\xi)\, r(\xi)\, d\xi + r(x) \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi < x}} \frac{\partial}{\partial x} G(t,\xi) +$$

$$+ \int_x^b \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,\xi)\, r(\xi)\, d\xi - r(x) \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} \frac{\partial}{\partial x} G(x,\xi) =$$

pero justamente $\displaystyle \lim_{\substack{x \to \xi \\ x < \xi}} \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) - \lim_{\substack{x \to \xi \\ x > \xi}} \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) = \frac{1}{p(\xi)}$

$$y''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(t,\xi)\, r(\xi)\, d\xi - \frac{r(x)}{p(x)}$$

de donde $L[y] = -\,p\,y'' - p'\,y' + qy = \int_a^b L[G(\_,\xi)]\; r(\xi)\; d\xi + r(x) = r(x)$

pues $L[G(\_,\xi)](x) = 0$ salvo para $x = \xi$

<u>Obs:</u> La función de Green es la única G para la cuál el teorema se verifica

<u>dem</u> <u>1:</u> (formal) la única solución del problema $Ly = \delta_s$ con condiciones de contorno $y(a) = y(b) = 0$ es por el teorema:

$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)\; \delta_s(x)\; d\xi = G(x,s)$

así cualquier G que verifique el teorema debe cumplir la definición que dimos de la función de Green

(esta demostración encierra una mentira: al demostrar el teorema supusimos r continua!)

<u>dem</u> <u>2:</u> (correcta) si $\tilde{G}$ verifica también el teorema

$\int_a^b G(x,\xi)\; r(\xi)\; d\xi = \int_a^b \tilde{G}(x,\xi)\; r(\xi)\; d\xi$ para toda r continua

$\Rightarrow \int_a^b [G(x,\xi) - \tilde{G}(x,\xi)]\; r(\xi)\; d\xi = 0$

como las continuas son densas en L^2 $G(x,\xi) = \tilde{G}(x,\xi)$ para casi todo ξ

<u>Ejemplo:</u> Consideremos el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -y'' + y = f \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

($p = 1$, $q = 1$)

encontremos la función de Green

una base de soluciones de $-y'' + y = 0$ es $\{ e^t, e^{-t} \}$

podemos elegir $y_1(t) = e^t - e^{-t}$ $\quad y_1(t) = e^t + e^{-t}$ $\quad y_1(0) = 2$

$y_2(t) = y_1(t-1) = e^{t-1} - e^{1-t} = e^{-1}\,e^t - e\,e^{-t}$

$$W = \overline{W} = \begin{vmatrix} e^t - e^{-t} & e^{t-1} - e^{1-t} \\ e^t + e^t & e^{t-1} + e^{1-t} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^t & e^{t-1} - e^{1-t} \\ e^t & e^{t-1} + e^{1-t} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\,e^{-t} & e^{t-1} - e^{1-t} \\ e^t & e^{t-1} + e^{1-t} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{t}\begin{vmatrix} 1 & e^{t-1} - e^{1-t} \\ 1 & e^{t-1} + e^{1-t} \end{vmatrix} + e^{t}\begin{vmatrix} -1 & e^{t-1} - e^{1-t} \\ 1 & e^{t-1} + e^{1-t} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{t}\, 2\, e^{1-t} + (-e^{t})\begin{vmatrix} 1 & e^{t-1} + e^{1-t} \\ 1 & e^{t-1} + e^{1-t} \end{vmatrix} = 2\, e$$

$$G(t,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{(e^{\xi-1}+ e^{1-\xi})(e^{t}-e^{-t})}{2e} & \text{si } t < \xi \\[2ex] -\dfrac{(e^{\xi} + e^{-\xi})(e^{t-1}+e^{1-t})}{2e} & \text{si } t \geqslant \xi \end{cases}$$

<u>Obs:</u> Un tratamiento similar es posible para otras condiciones de contorno