Ecuaciones Diferenciales

Primer Cuatrimestre 2016

Práctica 1

Ecuaciones ordinarias

1. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones

   (a) $\frac{du}{dt} = \frac{1+t}{1-u}$

   (b) $\frac{du}{dt} = t \exp u$

   (c) $\frac{du}{dt} = \frac{u}{t}$

   (d) $\frac{du}{dt} = \frac{u}{t} + \left(\frac{u}{t}\right)^2$

   (e) $\frac{du}{dt} = t^2 \sin u$

   (f) $\frac{du}{dt} = \sqrt{t+u} - 1$

   (g) $\frac{du}{dt} = -\frac{u}{t} + u^{1/2}$

   (h) $\frac{du}{dt} = \frac{t^2}{u}$

   (i) $\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1 + 2u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = 3u_1 + 2u_2 \end{cases}$

   (j) $\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1 - u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = u_1 + u_2 \end{cases}$

   (k) $\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 2u_1 - u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = 4u_1 + 2u_2 \end{cases}$

   (l) $\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 2u_1 + u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = 2u_2 \end{cases}$

   (m) $\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -u_2 + 2 \\ \frac{du_2}{dt} = 2u_1 + 3u_2 + t \end{cases}$

   (n) $\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 2u_1 - u_2 + e^{2t} \\ \frac{du_2}{dt} = 4u_1 + 2u_2 + 4 \end{cases}$

2. Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

   (a) $x'' - 8x' + 16x = 0$

   (b) $x'' - 2x' + 10x = 0$

   (c) $x'' - x' - 2x = 0$

   En cada uno de los casos anteriores, encontrar una solución exacta de la ecuación no homogénea con término independiente $t, e^t, 1$ y e^{-t}.

3. *Lema de Gronwall.* Sean u y v funciones continuas no negativas en $[a, b]$ tales que, para $\alpha \geq 0$, satisfacen

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(\tau)\, v(\tau)\, d\tau \quad , t \in [a, b]$$

Probar que

$$u(t) \leq \alpha \exp \int_a^t v(\tau)\, d\tau$$

En particular si $\alpha = 0$ entonces $u \equiv 0$.

4. (a) Probar que el problema de valores iniciales
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u), & t_0 < t < t_1 \\ \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$
donde f es continua y $u \in C[t_0, t_1] \cap C^1(t_0, t_1)$, es equivalente a la ecuación integral

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau))\, d\tau$$

(b) Mostrar que si f es Lipschitz en la segunda variable y $t_1 - t_0$ es suficientemente pequeño, la ecuación integral de (i) tiene un único punto fijo.

(c) Si f es Lipschitz en la segunda variable, probar que la solución del problame de valores iniciales del item (a) depende continuamente del dato inicial u_0.

5. (a) Probar que el problema
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 1 + u^2 \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$
tiene solución en el intervalo maximal $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(b) Estudiar la unicidad del problema
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u^{1/3} \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

6. Sea $f\left(t,u\right)$ definida en el abierto $\Omega\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R^n}$ con valores en $\mathbf{R^n}$ continua en $\left(t,u\right)$ y lipschitziana en u. Se considera para $\left(t_0,u_0\right)\in\Omega$ el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}=f\left(t,u\right) \\ \\ u\left(t_0\right)=u_0 \end{cases}$$

   (a) Probar que existe un intervalo abierto maximal $I\left(t_0,u_0\right)\subset\mathbf{R}$, $t_0\in I\left(t_0,u_0\right)$ donde la solución está definida.

   (b) Se define el flujo asociado al problema de valores iniciales de la forma $\phi\left(t,t_0,u_0\right)=u\left(t\right)$, para $t\in I\left(t_0,u_0\right)$. Probar que si $t_1,t_2\in I\left(t_{0,}u_0\right)$, entonces $t_2\in I\left(t_{1,}\phi\left(t_1,t_0,u_0\right)\right)$ y vale

$$\phi\left(t_2,t_0,u_0\right)=\phi\left(t_2,t_1,\phi\left(t_1,t_0,u_0\right)\right)$$

   (c) Probar que si el sistema es autónomo (f no depende de t),

$$\phi(t,t_0,\cdot)=\phi(t-t_0,0,\cdot).$$

   (d) Probar que si $\left(t_0,u_0\right)\in\Omega$ verifica que $\phi(\cdot,t_0,u_0)$ no está definido para todo tiempo, entonces la trayectoria se escapa de cualquier compacto $K\subset\Omega$.

7. Si $A(t)\in C^1(R,R^{n\times n})$, entonces el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) \\ x(t_0) &= x_0\in R^n \end{cases}$$

   tiene una única solución definida para todo $t\in R$.

8. Probar que dada $f:R\rightarrow R$ positiva y localmente Lipschitz, la solución del problema

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

   existen globalmente (para $t>t_0$) si y sólo si

$$\int^{+\infty}\frac{1}{f}\,dx=+\infty.$$

9. Probar que la ecuación de orden n

$$\begin{cases} u^{(n)} = f\left(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}\right) \\ \\ u(t_0) = u_0, u'(t_0) = u_1, \ldots\ldots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

es equivalente al sistema de primer orden

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = v_2 \\ \\ \frac{dv_2}{dt} = v_3 \\ \quad\vdots \\ \frac{dv_n}{dt} = f(t, v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ \\ v_1(t_0) = u_0, \ldots\ldots, v_n(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

10. Sea $f(t,u)$ definida en el abierto $\Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R^n}$ con valores en $\mathbf{R^n}$ continua en (t,u) y lipschitziana en u con constante K,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t,u) \\ \\ u(t_0) = u_j \ , j = 0, 1 \end{cases}$$

Probar que para $t \in I(t_0, u_0) \cap I(t_0, u_1)$ se cumple

$$|\phi_{t,t_0}(u_1) - \phi_{t,t_0}(u_0)| \leq \exp(K|t - t_0|)|u_1 - u_0|$$

11. Sea f definida en $\Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, tal que f y $\frac{\partial f}{\partial u}$ son continuas en Ω. Probar que el flujo $\phi_{t,t_0}(u_0)$asociado al problema $\frac{du}{dt} = f(t,u)$ es C^1 en (t, u_0)