Ecuaciones de primer orden

1- Ecuaciones lineales de primer orden

Consideremos el siguiente problema:

resolver la ecuación lineal de primer orden[1]

$$a(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial x} + b(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial y} = c(x,y) \qquad (1)$$

para una función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con una condición inicial

$$f(X(s),Y(s)) = g(s) \qquad (2)$$

a lo largo de la curva $\beta(s) = (X(s),Y(s))$

Veamos una interpretación geométrica de la ecuación (*)

los vectores $T_x = \left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ y $T_y = \left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ generan el tangente al

gráfico de f (en un punto de la forma $(x,y,f(x,y))$ $\Rightarrow$

se deduce que el vector $N = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$ es normal al gráfico de f

(porque es ortogonal a ambos) ,y por lo tanto decir que f

satisface la ecuación diferencial (*) significa que el vector (a,b,c) es en cada punto tangente al gráfico de f (ya que es ortogonal a N)

Esto conduce a la siguiente idea para resolver la ecuación:
Sea $(x(t),y(t))$ una curva en el plano ,$\alpha(t) = (x(t),y(t),f(x(t),y(t))$ es una curva en el gráfico de f, cuyo vector tangente vale:

$$\alpha'(t) = \left(x'(t),y'(t), \frac{\partial f}{\partial x}\,x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\,y'(t)\right) =$$

$$= (a(x(t),y(t)),b(x(t),y(t)),c(x(t),y(t))$$

y $\alpha(0) = (x(0),y(0),f(x(0),y(0))$

[1] La ecuación diferencial lineal de primer orden más general en dos variables no es (1) sino $a(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial x} + b(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial y} + f\,d(x,y) = c(x,y)$

Podemos considerar para cada s el el siguiente problema de ecuaciones

ordinarias $\alpha'(t) = (a,b,c)$ y $\alpha(0) = (X(s),Y(s),f(X(s),Y(s)) =$
$= (X(s),Y(s),g(s))$

o sea escribiendo $\alpha(t) = (x(t,s),y(t,s),z(t,s))$

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t,s),y(t,s))$$

$$\frac{dy}{dt} = b(x(t,s),y(t,s)) \qquad (3)$$

$$\frac{dz}{dt} = c(x(t,s),y(t,s))$$

$$x(0,s) = X(s)$$
$$y(0,s) = Y(s)$$
$$z(0,s) = g(s)$$

(sabemos que este problema tiene solución unica)
y "despejar" $z = f(x,y)$ [si se puede]

[Obtendremos el gráfico de f como una familia de curvas
$(x(t,s),y(t,s),z(t,s))$)

Ejemplo 1.1: consideremos la ecuación $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

con la condición inicial $f(x,0) = g(x)$

Las ecuaciones anteriores (3) toman la forma:

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$x(0,s) = s$

$y(0,s) = 0$

$z(0,s) = g(s)$

la solución es $x(t) = s + t$; $y(t) = t$; $z(t) = g(s)$

Quiero despejar (s,t) en función de (x,y)

$t = y$

$s = x-t = x-y$

queda $z = g(x-y)$

luego $f(x,y) = g(x-y)$ es la solución buscada

[en este caso vemos que la solución es constante a lo largo de cada recta $x-y = k$ (ya que $c = 0$) ; rectas que resultan de resolver las dos primeras ecuaciones $\frac{dx}{dt} = a$; $\frac{dy}{dt} = b$]

<u>Obs:</u> El mismo método se aplica para resolver la ecuación cuasilineal de primer orden

$$a(x,y,f)\,\frac{\partial f}{\partial x} + b(x,y,f)\,\frac{\partial f}{\partial y} = c(x,y,f) \qquad (4)$$

con la condición inicial (2)

en la que a,b y c pueden depender de f las ecuaciones anteriores quedan:

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t,s),y(t,s),z(t,s))$$

$$\frac{dy}{dt} = b(x(t,s),y(t,s),z(t,s)) \qquad (5)$$

$$\frac{dz}{dt} = c(x(t,s),y(t,s),z(t,s))$$

$$x(0,s) = X(s)$$
$$y(0,s) = Y(s)$$
$$z(0,s) = g(s)$$

<u>2- Curvas Caracteristicas</u>

<u>Def.:</u> Una curva $(x(t),y(t))$ es una característica de la ecuación (4)

con la condición inicial (2) si satisface

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t),y(t),f(x(t),y(t))$$

$$\frac{dy}{dt} = b(x(t,s),y(t,s),f(x(t),y(s))$$

siendo f la solución de la ecuación

si la ecuación es lineal en estas ecuaciones no interviene la solución f de la ecuación

<u>Obs:</u> Por lo anterior si $(x(t),y(t))$ es una curva característica y ponemos $z(t) = f(x(t),y(t))$ encontramos que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial x} = c(x(t),y(t),z(t))$$

en particular si $c = 0$ (ecuación homogénea) encontramos que f es constante a lo largo de las características.

<u>Obs:</u> esta cuenta muestra que si f es una solución de la ecuación el sistema anterior se satisface

<u>5- Condiciones para que el metodo funcione : curvas no caracteristicas</u>

Queremos saber en qué condiciones el procedimiento anterior proporciona una solución de la ecuación.

Sabemos que si $a,b,c:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son continuas entonces el sistema (3) tiene para cada s una única solución $x = x(t,s)$ $y = y(t,s)$ $z = z(t,s)$ por lo menos para t lo suficientemente pequeño

Para que podamos encontrar la solución debemos poder invertir las ecuaciones $x = x(t,s)$ $y = y(t,s)$ a fin de econtrar $t = T(x,y)$ $s = S(x,y)$ y entonces la solución será $f(x,y) = z(T(x,y),S(x,y))$

Sea $\beta(s_o) = (X(s_o),Y(s_o) = (x_o,y_o)$ un punto de la curva sobre la que damos el dato inicial de modo que $x(0,s_o) = x_o$ $y(0,s_o) = y_o$

por el teorema de la función inversa esto será posible en un entorno de $(0,s_o)$ si el jacobiano

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(0,s_o) & \frac{\partial x}{\partial s}(0,s_o) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0,s_o) & \frac{\partial y}{\partial s}(0,s_o) \end{vmatrix} \text{ es distinto de cero}$$

ahora por las ecuaciones (5) y las condiciones iniciales

$$\frac{\partial x}{\partial t}(0,s_o) = a(x(0,s_o),y(0,s_o),z(0,s_o)) = a(x_o,y_o,g(s_o))$$

Análogamente encontramos que:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0,s_o) = b(x_o,y_o,g(s_o))$$

por otra parte como $x(0,s) = X(s)$ tenemos que:

$$\frac{\partial x}{\partial s}(0,s_o) = X'(s_o)$$

y como $y(0,s) = Y(s)$ tenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial s}(0,s_o) = Y'(s_o)$$

sustituyendo tenemos que hemos de exigir :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(x_o,y_o,g(s_o)) & X'(s_o) \\ b(x_o,y_o,g(s_o)) & Y'(s_o) \end{vmatrix} \neq 0$$

<u>Def.:</u> Una curva $\beta(s) = (X(s),Y(s))$ se dice <u>no</u> <u>caracteristica</u> para la ecuación cuasi-lineal

$$a(x,y,f)\frac{\partial f}{\partial x} + b(x,y,f)\frac{\partial f}{\partial y} = c(x,y,f)$$

con condición inicial $f(X(s),Y(s)) = g(s)$ si $\forall s$ el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(X(s),Y(s),g(s)) & X'(s) \\ b(X(s),Y(s),g(s)) & Y'(s) \end{vmatrix} \text{ es no nulo} \quad (6)$$

<u>Obs:</u> si la ecuación es lineal (a y b no dependen de f) esta condición no

depende del dato inicial g.

Obs: Como (X'(s),Y'(s)) es el vector tangente a la curva la condición (6) expresa que el vector (a(X(s),Y(s),g(s)),b(X(s),Y(s),g(s)) debe ser transversal a la curva ,esto es no paralelo al vector tangente

Hemos demostrado:

Teorema: Si β es una curva no característica $\Rightarrow$ existe una única solución de la ecuación definida en un entorno de cada punto $(x_o,y_o) = \beta(s_o)$ de la curva

Por continuidad se obtiene una solución en un entorno de la curva

6- Generalizacion a $\mathbb{R}^n$

Podemos tener más generalmente una ecuación cuasilineal en cualquier número de variables

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,x_2,...,x_n,f)\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{n+1}(x_1,x_2,...,x_n,f) \qquad (7)$$

con la condición inicial

$$f(s) = G(s) \text{ en una hipersuperficie regular } S \subseteq \mathbb{R}^n \qquad (8)$$

Dado un punto $s_o \in S$ digamos que $\varphi:U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to S$ es una parametrización de S cerca de s_o

llamamos $s_1,s_2,...,s_{n-1}$ a las coordenadas de un punto $s = \varphi(s_1,s_2,...,s_{n-1})$ $\in S$, y digamos que $s = \varphi(s_1^o,s_2^o,....,s_{n-1}^o)$

Así pues la ecuación anterior se escribe en coordenadas:

$$f(\varphi(s_1,s_2,...,s_{n-1})) = g(s_1,s_2,...,s_{n-1})$$

(donde $g = G \circ \varphi$)

planteamos las ecuaciones:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1,x_2,...,x_{n+1}) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n+1)$$

con condiciones iniciales

$x_i(s_1,s_2,...,s_{n-1},t) = \varphi_i(s_1,s_2,...,s_{n-1})$ para $1 \leqslant i \leqslant n$

$x_{n+1}(s_1,s_2,...,s_{n-1},0) = g(s_1,s_2,...,s_{n-1})$

podemos resolver estas ecuaciones si t es pequeño

Queremos ahora invertir la transformación

$x_1 = x_1(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, t)$

$x_2 = x_2(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, t)$

...

$x_n = x_n(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, t)$

cerca del punto $(s_1^0, s_2^0, \ldots, s_{n-1}^0, 0)$

de vuelta esto será posible siempre que el jacobiano

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ \cdots & & & & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial s_1} & \frac{\partial x_n}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_2} & a_1 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_2} . & a_2 \\ \cdots & & & & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial s_2} & a_n \end{vmatrix}$$

sea distinto de cero en el punto $(s_1^0, s_2^0, \ldots, s_{n-1}^0, 0)$

Como los vectores $\frac{\partial \varphi}{\partial s_i}$ (columnas de la matriz anterior) generan $T_{s_0}S$

esto ocurrirá si el vector $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ no es tangente a S en s_0

<u>Obs:</u> a depende de $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ y en general también de cuanto vale x_{n+1}

en s_0 es decir del dato inicial $G(s_0))$

Esto no ocurre si en la ecuación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no dependen de f

Bajo esta condición se obtiene una solución en un entorno de s_0 por:

$f(x) = x_{n+1}(s_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), s_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, s_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), t)$

<u>Def.:</u> Decimos que S es característica para (7) con la condición (8) si $a \in T_sS \ \forall \ s \in S$, y decimos que es no característica si $a \notin T_sS \ \forall \ s$

Hemos demostrado:

<u>Teorema:</u> Si S es una hiper-superficie no característica para (7) con la condición inicial (8) y si $s_o \in S \Rightarrow$ existe una solución en un entorno de s_o

Por continuidad se obtiene una solución en un entorno de S

<u>7- Ejemplo</u>:

Si f es una función homogénea de grado n ,esto es:

$$f(\lambda.x_1,\lambda.x_2,...,\lambda.x_n) = \lambda^n f(x_1,x_2,...,x_n)$$

derivando respecto de λ encontramos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} f(\lambda.x_1,\lambda.x_2,...,\lambda.x_n)\ x_i = n\ \lambda^{n-1} f(x_1,x_2,...,x_n)$$

en particular cuando λ =1 resulta que f satisface la ecuación en derivadas parciales

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\ x_i = n\ f$$

recíprocamente supongamos que f satisface la ecuación anterior y postulemos una condición inicial $f(x_1,x_2,...,x_{n-1},1) = u(x_1,x_2,...,x_n)$ el método anterior conduce al sistema:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant n \quad x_i(0) = s_i \ (1 \leqslant i \leqslant n-1) \quad x_n(0) = 1$$

$$\Rightarrow x_i(t) = s_i\ e^t \ (1 \leqslant i \leqslant n-1) \quad x_n(t) = e^t \ \Rightarrow x_i = s_i\ x_n \ (1 \leqslant i \leqslant n-1)$$

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = n\ x_{n+1} \quad x_{n+1}(0) = u(s_1,s_2,...,s_n)$$

$$x_{n+1}(t) = e^{nt}\ u(s_1,s_2,...,s_n) = x_n^t\ u\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, ... \frac{x_{n-1}}{x_n} \right)$$

la solución es pues $f(x_1,x_2,...,x_n) = x_n^t\ u\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, ... \frac{x_{n-1}}{x_n} \right)$

y resulta una función homogénea de grado n