Cálculo Avanzado - Primer Cuatrimestre de 2016

Práctica 9: El espacio de funciones continuas

---

1. En cada uno de los siguientes casos, decidir si la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente y/o uniformemente. Cuando corresponda, decidir si el límite es una función continua:

   (a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n,$

   (b) $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n,$

   (c) $f_n : (0,1/2] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n,$

   (d) $f_n : [2,+\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{e^x}{x^n},$

   (e) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right),$

   (f) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{(x^2+1)x}{1+(n+1)^2x^2},$

   (g) $f_n : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(z) = |nz^2|,$

   (h) $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f_n(z) = \frac{n}{n+1}z,$

2. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones de X a $\mathbb{R}$ que convergen uniformemente.

   (a) Probar que $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

   (b) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son uniformemente acotadas, probar que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

   (c) ¿Es necesariamente válida la afirmación anterior si solamente una de las dos sucesiones es uniformemente acotada?

3. Sea X un espacio métrico compacto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente, la sucesión $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

4. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tales que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. Decidir si vale la siguiente afirmación:

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx.$$

5. (a) Probar que las siguientes series convergen uniformemente en $(-1,1)$:

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$,

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(1+x^2)}$.

(b) ¿En qué casos la derivada de la serie coincide con la serie que se obtiene derivando término a término?

6. Consideramos la función $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Probar que la serie converge uniformemente en cada intervalo $(1 + \varepsilon, +\infty)$ hacia una función continua, y que es posible derivarla término a término en dicho intervalo.

7. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia equicontinua de funciones de X a $\mathbb{R}$ que converge puntualmente a $f : X \to \mathbb{R}$.

(a) Probar que f es continua.

(b) Si X es compacto, probar que f_n converge uniformemente a f.

8. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $[a, b]$ a $\mathbb{R}$ integrables y uniformemente acotadas y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt.$$

Probar que la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre $[a, b]$.