Cálculo Avanzado - Primer Cuatrimestre de 2016

Práctica 6: Completitud

---

1. Sea $(X, d)$ un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente. Probar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

2. Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos, $f : X \to Y$ uniformemente continua y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión de Cauchy. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ es de Cauchy. ¿Sigue valiendo necesariamente la afirmación anterior si $f$ es continua pero no uniformemente continua?

3. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$. Probar que $g$ no es uniformemente continua, pero si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy entonces $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy.

4. Consideramos el conjunto $C_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid a_n \to 0\}$ con la distancia
$$d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{x\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|.$$
Probar que es un espacio métrico completo.

5. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico $X$ es un subespacio completo de $X$, entonces $X$ es completo.

6. Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ sucesiones de Cauchy. Probar que la sucesión $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es convergente.

7. Consideramos en $\mathbb{R}$ la métrica
$$d'(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$
Probar que es equivalente a la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, pero que $\mathbb{R}$ no es completo con la mtrica $d'$.

8. Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $D \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad de que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ converge a un elemento de $X$. Probar que $X$ es completo.

9. Sean $X$ e $Y$ espacios métricos con $Y$ completo. Sea $D \subset X$ un subconjunto denso, y sea $f : D \longrightarrow Y$ uniformemente continua. Probar que $f$ tiene una única extensión continua a todo $X$.

10. Sean $(X, d)$ un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea $D$ un subconjunto denso y numerable de $X$. Probar que $D$ no es un $G_\delta$.

11. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua solamente en $\mathbb{Q}$.

    *Sugerencia:* Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

12. Sea $(X, d)$ un espacio métrico y $A \subset X$. Probar que son equivalentes:
    (a) $A$ es nunca denso;
    (b) toda bola abierta $B$ contiene otra bola abierta $B_1$ tal que $B_1 \cap A = \emptyset$;
    (c) $A$ no es denso en ninguna bola abierta.

13. Sea $(X, d)$ un espacio métrico.
    (a) Probar que si $A$ es nunca denso, entonces $X \setminus A$ es denso. ¿Vale la recíproca?
    (b) Probar que si $A$ es abierto y denso, entonces $X \setminus A$ es nunca denso.

14. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

15. Decidir cuáles de las siguientes funciones son contracciones:
    (a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \cos(x)$;
    (b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \cos(\cos(x))$;
    (c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_3(x) = e^x$;
    (d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_4(x) = e^{-x}$;
    (e) $f_5 : [1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f_5(x) = e^{-x}$.

16. Sea $X$ un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ tal que existe $n \in \mathbb{N}$ que verifica que

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}}$$

    es una contracción. Probar que $f$ tiene un único punto fijo.

17. Sea $X$ un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ sobreyectiva y tal que existe una constante $c > 1$ de manera que para todos $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \geq c \cdot d(x, y).$$

    Probar que $f$ tiene un único punto fijo.