Cálculo Avanzado - Primer Cuatrimestre de 2016

Práctica 3: Aspectos básicos de Espácios Métricos

---

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}$:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2; \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}; \qquad d_3(x,y) = |x^2 - y^2|; \qquad d_4(x,y) = |x-2y|.$$

2. (a) Probar que las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}^n$:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|; \qquad d_2(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}; \qquad d_\infty(x,y) = \sup_{1\le i\le n} |x_i - y_i|.$$

   (b) Para $n = 2$, dibujar las tres bolas abiertas $B(0,1)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio 1.

3. Sean X un conjunto y $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

   Probar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ).

4. Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$ y $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definida por

$$d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|.$$

   Probar d es una métrica en ℓ^∞.

5. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se define $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$. Probar que las siguientes funciones son métricas en $C[a,b]$:

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx; \qquad d_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

6. Sea $N : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$N(a) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } a \neq 0, \quad p^n \mid a \quad \text{y} \quad p^{n+1} \not\mid a\,, \\ 0 & \text{si } a = 0, \end{cases}$$

   donde p es un primo fijo, y sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(a,b) = N(a-b)$. Probar que d es una métrica en $\mathbb{Z}$.

7. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$. Probar que d' es una métrica en X. Observar que $0 \leq d'(x, y) < 1$ para todo $x, y \in X$.

8. Sean (X_1, d_1), (X_2, d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la función $d_\infty : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

Probar que d_∞ es una métrica en $X \times Y'$.

9. Sea $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todos $x, y \in X_n$ vale $0 \leq d_n(x, y) \leq 1$. Para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se define

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

10. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos y cuáles son cerrados.

$$[0, 1]; \qquad (0, 1); \qquad \mathbb{Q}; \qquad \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \qquad \mathbb{Z}; \qquad [0, 1) \cup \{2\}.$$

11. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F \setminus G$ es cerrado y $G \setminus F$ es abierto.

12. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Probar que:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

    (b) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

13. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

14. Hallar el interior, clausura, frontera y derivado de cada uno de los conjuntos del Ejercicio 10.

15. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$.

    (a) Probar que $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq \overline{B}(a, r)$.

    (b) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$.

16. Sea $A = \left\{ \dfrac{m}{2^n} \Big/ m \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$. Probar que A es denso en $\mathbb{R}$.

17. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$.

18. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$. Probar que:

    (a) $A^\circ = \displaystyle\bigcup_{\substack{G \text{ abierto} \\ G \subseteq A}} G$.

    (b) $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$.

    (c) $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$.

    (d) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

    (e) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?

    (f) $\overline{A} = \displaystyle\bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A \subseteq F}} F$.

    (g) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$.

    (h) $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

    (i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?

    (j) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

    (k) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$.

    (l) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.

    (m) ∂A es cerrado.

    (n) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

    (o) A' es cerrado.

    (p) $A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$.

    (q) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

    (r) $\overline{A} = A \cup A'$.

    (s) $(\overline{A})' = A'$.

19. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$. ¿Es necesariamente cierto que

    (a) $\overline{A} = \overline{A^\circ}$?

    (b) $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

20. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ un conjunto no vacío. Probar que para todo $r > 0$, $\{x \in X \mid d(A, x) < r\}$ es abierto y $\{x \in X \mid d(A, x) \leq r\}$ es cerrado.

21. Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $A, B, C \subseteq X$ no vacíos. Decidir si las siguientes afirmaciones son necesariamente ciertas:

(a) $d(A,B) \leq d(A,x) + d(B,x)$.

(b) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.

22. Probar que las métricas en $\mathbb{R}^n$ definidas en el Ejercicio 2 son equivalentes.

23. Sean d_1 y d_2 dos métricas en un conjunto X. Probar que si existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que
$$d_1(x,y) \leq c_1 d_2(x,y) \qquad \text{y} \qquad d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y)$$
para todos $x, y \in X$, entonces d_1 y d_2 son equivalentes.

24. Decidir si las métricas en $C[a,b]$ definidas en el Ejercicio 5 son equivalentes.

25. Sea (X,d) un espacio métrico y d' la métrica definida en el Ejercicio 7. Probar que d y d' son equivalentes.

26. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X.

    (a) Probar que $[0,1)$ es un G_δ y un F_σ de $\mathbb{R}$.

    (b) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ y el complemento de un F_σ es un G_δ.

    (c) Probar que todo cerrado es un G_δ y que todo abierto es un F_σ.

27. Probar que toda familia de conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ es finita o numerable. Dar un ejemplo de familia de conjuntos cerrados disjuntos que no sea finita ni numerable.

28. Dado $S \subset \mathbb{R}^n$, probar que el conjunto de puntos aislados de S es finito o numerable.

29. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las bolas $B(q,r)$ de $\mathbb{R}^n$ con centro $q \in \mathbb{Q}^n$ y radio racional r. Observar que $\mathcal{B}$ es numerable. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x \in S$. Probar que $\exists\, B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq S$.

30. *Teorema de Lindelöf.* Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{U} = \big(U_i\big)_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de A. Probar que existe un subcubrimiento numerable de $\mathcal{U}$ que cubre a A.

31. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ infinito y no numerable. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si para todo $r > 0$, $B(x,r) \cap S$ es infinito y no numerable. Sea T el conjunto de puntos de condensación de S. Probar que:

    (a) T es no vacío, cerrado y no posee puntos aislados.

    (b) $S - T$ es numerable.

    (c) $S \cap T$ es no numerable.