Cálculo Avanzado - Primer Cuatrimestre de 2016

Práctica 1: Números Reales

---

1. Sea F un cuerpo ordenado y sea $a \in F$. Probar que
   (a) $a \cdot 0 = 0$,
   (b) $(-1) \cdot a = -a$,
   (c) si $a \geq 0$ entonces $-a \leq 0$,
   (d) $a^2 \geq 0$,
   (e) si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$.

2. Sea F un cuerpo arquimediano y sean $a, b \in F$ con $a < b$. Probar que
   (a) si $b - a > 1$ existe $m \in \mathbb{Z}$ con $a < m < b$,
   (b) existe $q \in \mathbb{Q}$ con $a < q < b$.

3. Probar que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r^2 = 2$.

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Probar que existe $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $a < s < b$.

5. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente creciente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$.

6. Probar que para todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente existe una sucesión creciente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

7. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que
   (a) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0,\ a_n \leq b_n \leq c_n$;
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$.

   Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

8. Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es también convergente.

9. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona. Probar que si existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

10. (a) Encontrar una sucesión **no** convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifique $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$.
    (b) Decidir si existe una sucesión **no** convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifique $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

11. Hallar los límites superior e inferior de las siguientes sucesiones:
    (a) $1,\ 3,\ -1,\ 1,\ 3,\ -1,\ 1,\ 3,\ -1,\ \ldots$
    (b) $(-1)^n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$.
    (c) $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
    (d) $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por: $s_1 = 0$, $s_{2n} = \dfrac{s_{2n-1}}{2}$, $s_{2n+1} = \dfrac{1}{2} + s_{2n}$.
    (e) $\dfrac{n}{3} - \left[\dfrac{n}{3}\right]$.

12. Encontrar una sucesión $(a_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\liminf a_n = -3$, $\limsup a_n = 5$ y el conjunto $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ sea infinito.

13. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales acotada. Probar que $\alpha = \limsup a_n$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ se verifica:
    (a) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq n_0$, $a_n < \alpha + \epsilon$;
    (b) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m \geq n$ tal que $a_m > \alpha - \epsilon$.

14. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ si y sólo si $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$.

15. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales acotadas. Probar que:
    (a) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$.
    (b) Si $a_n, b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\limsup(a_n.b_n) \leq \limsup a_n.\limsup b_n$.
    (c) Si $c > 0$ entonces, $\limsup(c.a_n) = c.\limsup a_n$.

    Enunciar y probar resultados análogos para $\liminf$.

16. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$.
    (a) Probar que: $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
    (b) Deducir que si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R}_\infty$ entonces existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ y coincide con $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
    (c) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.