Cáculo Avanzado

Primer Cuatrimestre 2016

Primer Parcial - 10/05/2015

Nombre y apellido: LU:

Ejercicio 1. Sea $A = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $z_{n+k} = (z_k)^n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Calcular $\#A$.

Ejercicio 2. Sea $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones de ceros y unos. Sean $d_1, d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$d_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ e } y \text{ difieren en infinitos índices,} \\ \dfrac{k}{k+1} & \text{si } x \text{ e } y \text{ difieren en } k \text{ índices.} \end{cases}$$

$$d_2(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ \dfrac{1}{j} & \text{si } j \text{ es el primer índice donde difieren } x \text{ e } y. \end{cases}$$

a) Probar que d_1 y d_2 son métricas.

b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define $(e^k) \in X$ por $e^k_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$

Calcular la clausura de $A = \{(e^k) : k \in \mathbb{N}\}$ en (X, d_1) y en (X, d_2).

Ejercicio 3. Sean X e Y espacios métricos y sea $B(X,Y)$ el conjunto de funciones acotadas de X en Y, con la métrica infinito. Dotamos al espacio producto $B(X,Y) \times X$ de la métrica infinito. Se define la *función evaluación* por

$$\begin{aligned} \mathrm{ev} : B(X,Y) \times X &\to Y \\ (f,\ x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Probar que ev es continua en (f,x) si y sólo si f es continua en x.

Ejercicio 4. Sea $\varphi : A \to B$ un homeomorfismo local (es decir, para todo $a \in A$, existe $U \subseteq A$ abierto tal que $a \in U$ y $\varphi|_U : U \to \varphi(U)$ es homeomorfismo). Dado X un espacio métrico, sean $f, g : X \to A$ funciones continuas tales que $\varphi \circ f = \varphi \circ g$. Probar que si X es conexo, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$ o $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 5. Probar que no existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ y $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.