# Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre 2016

Ejercicios

---

**Ejercicio 1.** Calcular $\#\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : a_n \to 0 \text{ y } na_n \text{ no converge}\}$.

**Ejercicio 2.** Calcular

a) $\#\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} \text{ converge}\}$

b) $\#\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n} \text{ diverge}\}$

**Ejercicio 3.** Consideremos el conjunto

$$A = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : a_n > a_{n+1}\}$$

en el espacio métrico $(\ell^\infty, d_\infty)$.

a) Determinar la clausura de $A$.

b) ¿$(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \in A^o$?

**Ejercicio 4.** Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable. Consideramos en $\ell_\infty$ la métrica usual $d_\infty$. Definimos la función $f : X \to \ell_\infty$ como

$$f(x) = (d(x, x_n) - d(x_n, x_1))_{n\in\mathbb{N}}.$$

a) Probar que $f$ está bien definida y es continua.

b) Probar que $f$ es una inmersión isométrica, es decir, que

$$d(x, y) = d_\infty(f(x), f(y))$$

para todos $x, y \in X$.

**Ejercicio 5.** En $C[0, 1]$ definimos

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f(r_k) - g(r_k)|}{1 + |f(r_k) - g(r_k)|},$$

donde $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una numeración de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

a) Probar que $(C[0, 1], d)$ es un espacio métrico.

b) Probar que $id : (C[0,1], d_\infty) \to (C[0,1], d)$ es continua.

Recordar que:

$$d_\infty(f,g) = \operatorname*{máx}_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

c) Probar que $id : (C[0,1], d) \to (C[0,1], d_\infty)$ no es continua.

*Sugerencia:* Considere $\phi \in C[0,1]$ tal que $\phi(r_k) = 0$ para $1 \leq k \leq n$ y $\phi(r_{n+1}) = 1$. Utilice el Teorema de Urysohn.

**Ejercicio 6.** Sean $(X,d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $X$. Para cada $z$ en $A^c$ sea $f_z : A \to \mathbb{R}$ dada por $f_z(x) = \frac{1}{d(x,z)}$. Probar que $A$ es cerrado si y solo si $f_z$ es uniformemente continua para cada $z \in A^c$.

**Ejercicio 7.** Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx, \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}\}$.

a) Si $E \subset A$ es no numerable, probar que $E$ tiene algún punto de acumulación en $A$.

b) Determinar la clausura de $A$ en $\mathbb{R}^2$.

c) Calcular las componentes conexas y arcoconexas de $A \cup \{(0,1)\}$.

**Ejercicio 8.** Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado, entonces $\mathbb{R}^n \setminus X$ tiene una única componente conexa no acotada.

**Ejercicio 9.** Calcular las componentes conexas y arcoconexas del siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$(\{0\} \times [-1,1]) \cup \left\{ \left( x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) : x > 0 \right\}.$$

**Ejercicio 10.** Recordemos que un subconjunto de un espacio métrico es *nunca denso* si el interior de su clausura en vacío, que es de *primera categoría* si es unión numerable de conjuntos nunca densos, y que es de *segunda categoría* si no es de primera categoría.

a) Un espacio métrico numerable es de primera categoría si y sólo si no posee puntos aislados.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que no es constante en ningún intervalo. Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de segunda categoría, entonces $f(A)$ también es de segunda categoría.

**Ejercicio 11.** Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es monótona y sobreyectiva es continua.

**Ejercicio 12.** Sea $B(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dotado de la métrica $d_\infty$ y sea $D \subset \mathbb{R}$. Entonces el conjunto $E = \{f \in B(\mathbb{R}) : f(0) \in D\}$ es denso en $B(\mathbb{R})$ si y sólo si D es denso en $\mathbb{R}$.

**Ejercicio 13.** Sean $A$ y $B$ conjuntos infinitos con $\alpha = \#A \geq \#B = \beta$. Definimos $P_\beta(A)$ como el conjunto formado por los subconjuntos de $A$ que tienen cardinal $\beta$. Probar que: $\#P_\beta(A) = \#\{f : B \to A\} = \alpha^\beta$.

**Ejercicio 14.** Sea $X$ un espacio métrico. Decimos que un abierto $U \subseteq X$ es regular si $U = \overline{U}^\circ$.

a) Probar que la intersección de dos abiertos regulares es un abierto regular, pero que la unión de abiertos regulares no es necesariamente regular.

b) Probar que si $C \subseteq X$ es un subconjunto cualquiera, entonces $\overline{C}^{\circ}$ es un abierto regular.

c) Deducir que si $U$ y $V$ son abiertos regulares entonces $\overline{U \cup V}^{\circ}$ es el menor abierto regular que los contiene.

**Ejercicio 15.** Calcular el cardinal del conjunto $A = \{X \subseteq \mathbb{R}^2 : \#X = \aleph_0 \text{ y } \overline{X} = \mathbb{R}^2\}$.

**Ejercicio 16.** Probar que

$$||f|| = \sup_{x \in [0,1]} \{x^2 |f(x)|\}$$

es una norma en $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continuas}\}$. ¿Son $||.||$ y $||.||_\infty$ equivalentes?

**Ejercicio 17.** Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando una demostración o un contraejemplo según corresponda:

a) $(f(U))^\circ \subseteq f(U^\circ)$ para todo $U \subseteq X$, entonces $f$ continua.

b) $f^{-1}(V^\circ) \subseteq (f^{-1}(V))^\circ$ para todo $V \subseteq Y$, entonces $f$ continua.

c) $f$ continua, entonces $(f(U))^\circ \subseteq f(U^\circ)$ para todo $U \subseteq X$.

d) $f$ continua, entonces $f^{-1}(V^\circ) \subseteq (f^{-1}(V))^\circ$ para todo $V \subseteq Y$.