

Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2016

PRÁCTICA 9

ESPACIOS DE SOBOLEV

“En la cancha somos once contra once y los de afuera son de palo”

Maracanã 1950- Obdulio Varela

- Sean $1 \leq p \leq \infty$, $I = (-1, 1)$, $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$, $H(x) = 1$ si $x > 0$ y $H(x) = 0$ si no.
 - Probar que $u \in W^{1,p}(I)$ y que $u' = H$.
 - Más aún, toda función continua en \bar{I} con derivada continua a trozos en I pertenece a $W^{1,p}(I)$.
 - $H \notin W^{1,p}(I)$.
- Sean $1 < p \leq \infty$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}((a, b))$, $u \in L^p((a, b))$ tales que $u_n \rightarrow u$ en $L^p((a, b))$ y $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en $L^p((a, b))$. Probar que $u \in W^{1,p}((a, b))$ y que existe una subsucesión tal que $u_{n_k} \rightarrow u$ en $W^{1,p}((a, b))$.
- Probar que si $u \in W^{1,p}((a, b))$, $p > 1$, entonces

$$|u(x) - u(y)| \leq \left(\int_a^b |u'|^p dt \right)^{1/p} |x - y|^{1 - \frac{1}{p}}.$$

- Probar que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $W^{1,p}(I)$.
- Derivación de un producto.* Sean $u, v \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $uv \in W^{1,p}(I)$ y $(uv)' = u'v + uv'$. Además vale la fórmula de integración por partes

$$\int_y^x u'v = uv \Big|_y^x - \int_y^x uv'.$$

- Derivación de una composición.* Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$, y sea $u \in W^{1,p}(I)$. Entonces $G \circ u \in W^{1,p}(I)$ y $(G \circ u)' = (G' \circ u)u'$.
- “Resolver” el problema:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ en } (0, 1), \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

- Sea $f \in L^2([a, b])$. Probar que el problema de Neumann

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{en } (a, b) \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

tiene única solución $u \in H^1((a, b))$ con $\int_a^b u = 0$.

- Hallar los autovalores y las autofunciones de $Au = -u''$ con las condiciones de contorno
 - $u'(0) = u'(1) = 0$ (Neumann)
 - $u(0) = u(1)$, $u'(0) = u'(1)$ (periódicas)

Verificar en cada caso que la sucesión de autovalores λ_n tiende a infinito y la sucesión de autofunciones $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es base de $L^2((0, 1))$.

10. Se define el p -Laplaciano como $\Delta_p u \equiv (|u'|^{p-2}u')'$ con $p > 1$ (cuando $p = 2$, $\Delta_p u = u''$). Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f & \text{en } (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

con $f \in L^{p'}((a, b))$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

- (a) Probar que $u \in C_0^2((a, b))$ es solución del problema si y sólo si verifica la siguiente formulación débil

$$\int_a^b |u'|^{p-2}u'\varphi' dx + \int_a^b |u|^{p-2}u\varphi dx = \int_a^b f\varphi dx$$

para toda $\varphi \in C_0^1((a, b))$.

- (b) Probar que si $u \in W_0^{1,p}((a, b))$ minimiza el siguiente funcional

$$\Psi : W_0^{1,p}((a, b)) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Psi(u) = \frac{1}{p} \int_a^b |u'|^p + |u|^p dx - \int_a^b f u dx$$

entonces es una solución débil del problema del p -Laplaciano.

- (c) Probar que el problema del p -Laplaciano tiene una única solución débil en $W_0^{1,p}((a, b))$.