Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2016

PRÁCTICA 8

Operadores compactos – Espectro de un operador

Hay un jugador con manga larga, vamos a ver cómo influye en el partido, C. Bilardo

1. Sean E y F espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(E, F)$. Son equivalentes:

   (a) T es compacto.

   (b) $\overline{T(A)}$ es compacto, para todo conjunto acotado $A \subset E$.

   (c) Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente.

2. Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(E, F)$. Si T es compacto entonces $\forall\ x_n, x \in E$ tales que $x_n \xrightarrow{w} x$ se verifica que $T(x_n) \to T(x)$.

3. Sea E un espacio de Banach. Si $\dim E = \infty$, $Id : E \to E$ no es compacto.

   Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(E, F)$. Si $\dim E = \infty$ y T es compacto, entonces T no es inversible.

4. Sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $1 < p < \infty$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

   (a) T es compacto si y sólo si $\alpha_n \to 0$.

   (b) $R(T)$ es cerrado si y sólo si $(\frac{1}{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada (considerando sólo los n tales que $\alpha_n \neq 0$).

   (c) Si $\alpha_n \to 0$, hallar $\sigma(T)$.

   (d) Hallar $\sigma(T)$ en el caso general ($\alpha_n \in \ell^\infty$).

5. **(a)** Si $T \in \mathcal{B}(\ell^2, \ell^1)$ entonces T es compacto.

   (b) Sea $i : \ell^1 \to \ell^2$ la inclusión. ¿Es i compacta?

   (c) Probar que la inclusión, $i : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$ es compacta.

6. Sean E, F espacios de Banach y $T : E \to F$ un operador de Fredholm. Probar que si $\dim(\mathrm{Ker}(T')) = 0$, entonces para cada $y_0 \in F$ $T(x) = y_0$ tiene al menos una solución.

7. Mostrar que el operador shift $S : \ell^2 \to \ell^2$ y su inverso a izquierda T son operadores de Fredholm. Mostrar que S^k y T^k también son operadores de Fredholm y calcular sus índices.

8. Si $T : E \to F$ es un operador de rango finito, entonces es un operador de Fredholm?.

---

9. Sean $U \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $\varphi \in C(\overline{U})$ y $M_\varphi \in \mathcal{B}(C(\overline{U}))$ el operador de multiplicación.

   (a) Dar condiciones necesarias y suficientes para que M_φ sea inversible.

   (b) Calcular $\sigma(M_\varphi)$.

   (c) Dar condiciones necesarias y suficientes para que M_φ sea compacto.

10. Sean $1 < p < \infty$ y S y T en $\mathcal{B}(\ell^p)$ los operadores shifts a derecha e izquierda respectivamente.

    (a) Probar que $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ /\ |\lambda| \leq 1\}$ y que si $|\lambda| < 1$ entonces λ es un autovalor.

    (b) Calcular $\sigma(S)$.

    (c) Probar que S no tiene autovalores.

11. Sean E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{B}(E)$.

    (a) Si $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda^n \in \sigma(T^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

    (b) Si T es inversible y $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$.

12. Sean $1 < p < \infty$ y $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \ldots).$$

    (a) Probar que T no es compacto.

    (b) Probar que T^2 sí es compacto.

    (c) Calcular $\sigma(T)$.

13. Sea $\varphi \in L^\infty[0,1]$ y sea $M_\varphi \in \mathcal{B}(L^2[0,1])$ el operador de multiplicación. Hallar $\sigma(M_\varphi)$ en los siguientes casos:

    (a) φ continua en [0,1].

    (b) $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$.
