Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2016

PRÁCTICA 7

Operadores en espacios de Hilbert

1. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n \in B(H)$ tales que $\sup_n |\langle T_n x, y\rangle| < \infty \quad \forall x, y \in H$, entonces $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

2. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in B(H)$. Son equivalentes:

   (a) T es una isometría.

   (b) $T'T = I$.

   (c) $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H$.

Definiciones: *Si H es un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$, decimos que:*

- *T es autoadjunto si $T' = T$.*
- *T es normal si $T'T = TT'$.*
- *T es unitario si es inversible y $T^{-1} = T'$.*
- *T es positivo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0 \ \ \forall x \in H$.*

---

3. **(a)** Si $\varphi \in L^\infty[0,1]$, sea $M_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de multiplicación. Calcular M'_φ , probar que M_φ es normal y caracterizar $\{\varphi \in L^\infty[0,1] : M_\varphi \text{ es unitario }\}$.

   (b) Si $(\alpha_n)_n \in \ell^\infty$, sea $A : \ell^2 \to \ell^2$ dado por $Ax = (\alpha_n x_n)_n$. Calcular A', probar que A es normal y caracterizar $\{(\alpha_n)_n \in \ell^\infty : A \text{ es unitario }\}$.

4. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$. Son equivalentes:

   (a) T es unitario.

   (b) T' es unitario.

   (c) T es una isometría suryectiva.

   (d) T y T' son isometrías.

5. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ normal. Entonces:

   (a) $\|T^2\| = \|T\|^2$.

   (b) $\ker(T) = \ker(T')$.

   (c) $T^2 = T \implies T$ es autoadjunto.

   (d) $T^2 = 0 \implies T = 0$.

6. Si H es un espacio de Hilbert y $P \in B(H)$ un operador no nulo tal que $P^2 = P$, son equivalentes:

   (a) $P' = P$.

   (b) P es normal.

   (c) $\|P\| = 1$.

   (d) $\ker(P) = R(P)^\perp$.

7. Sean H un espacio de Hilbert y $S, T \in B(H)$. Probar que:

(a) $T'T$ y TT' son positivos.

(b) Si T es positivo, $S'TS$ es positivo.

8. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$. Probar que $R(T)$ es cerrado si y sólo si T es acotado inferiormente en $(\ker(T))^{\perp}$.

9. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$.

   (a) Si $\langle Tx, x\rangle = 0 \quad \forall x \in H$ entonces $T = 0$.

   (b) Dar un contraejemplo de (a) si H es Hilbert real.

   (c) Si H es un Hilbert real y T es autoadjunto, entonces vale (a).

   (d) T es normal si y sólo si $\|Tx\| = \|T'x\|$.

10. Sean H un espacio de Hilbert y $T_n, T \in B(H)$ normales.

    (a) Si $T_n x \to Tx \quad \forall x \in H$ entonces $T_n' x \to T'x \quad \forall x \in H$.

    (b) Dar un contraejemplo si T_n no son normales.

11. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$. Son equivalentes:

    (a) T es autoadjunto.

    (b) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$.

    (c) $\langle x, Tx\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$.

    (d) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in H$.

    (e) $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle \quad \forall x \in H$.

Definición: *Si H es un espacio de Hilbert, $T \in B(H)$ se dice isometría parcial si $T|_{(\ker T)^{\perp}}$ es una isometría.*

---

12. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$. Entonces T es isometría parcial si y sólo si $T'T$ es proyector.

13. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ positivo. Entonces $\{x \in H : \langle Tx, x\rangle = 0\}$ es un subespacio de H.

14. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$ autoadjunto. Si $x \in H$ es tal que $Tx \neq 0$ entonces $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n x \neq 0$.